



Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Fakultät für Maschinenbau
Institut für Mechanik

Masterarbeit von
Thomas Köthe

Entwicklung und Implementierung eines eindimensionalen Bernoulli-Modells der Ventilation in der menschlichen Lunge

Betreuer

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Ulrich Gabbert (Universität Magdeburg)

Prof. Dr.-Ing. habil. Claus Wagner (DLR Göttingen)

Dipl.-Ing. Daniel Feldmann (DLR Göttingen)

eingereicht am
31.10.2011

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln verfasst habe. Alle Passagen, die ich aus der Literatur oder aus anderen Quellen wie z. B. Internetseiten übernommen habe, habe ich mit Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Die Masterarbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form bisher bei keiner anderen Institution eingereicht.

Magdeburg, 31.10.2011

Kurzfassung

Die numerische Strömungssimulation der bei der Atmung oder Beatmung induzierten Strömung in der menschlichen Lunge stellt eine große Herausforderung dar. Die komplexe Geometrie des vollständigen Bronchialbaumes ist aus tomografischen Aufnahmen nur bedingt reproduzierbar. Wäre dennoch ein 3D-Modell einer gesamten menschlichen Lunge vorhanden, würde eine Simulation der Strömung in bis zu 24 Generationen sehr viel Rechenzeit und Speicherplatz beanspruchen. Um trotzdem Vorhersagen zu ermöglichen, wird üblicherweise nur ein Teil der Geometrie mittels dreidimensionalen numerischen Simulationen behandelt. Die Strömung im verbleibenden Teil, muss dann über Randbedingungen modelliert werden. Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer solchen Randbedingung.

Um dieses Randbedingungsmodell zu entwickeln sind zwei Schritte nötig. In einem ersten Schritt wird ein geometrisch vereinfachtes Modell, welches die Lunge als Netzwerk von starren Röhren betrachtet, angenommen. In einem Netzwerk kann die Strömung vereinfacht über eindimensionale Gesetzmäßigkeiten beschrieben werden. Dabei wird die Bernoulli-Gleichung mit Zusatztermen erweitert, mit denen die Druckverluste durch Reibung, Strömungsänderungen und die Trägheit des Fluids modelliert werden. Das elastische Verhalten des Alveolarbereiches wird über die Ausflussrandbedingung in das Modell gebracht.

Das daraus resultierende, nichtlineare Gleichungssystem wird numerisch gelöst. Hierfür wird ein numerische Verfahren in der Programmiersprache C++ geschrieben. Bei der numerischen Lösung wird besonders auf effiziente Programmierung geachtet um die Rechenzeit des Modells und den Speicherbedarf in Grenzen zu halten, da das entwickelte eindimensionale Simulationsmodell später als Randbedingung für Strömungssimulationen eingesetzt und dabei in jedem Zeitschritt gelöst werden muss.

Abstract

The numerical simulation of the ventilation in the human lung is a big challenge. The large complexity is not reproducible completely and even if there is an 3D modell, the simulation will take a lot of computation time. In order to still perform calculations, only the larger part of the geometry is calculated using computational fluid dynamics, the unrecognized part is usually brought into the model about boundary conditions. The aim of this work is to create such an model of boundary condition.

To develop an model for the human lung it is necessary to find an assumption for the geometry. This is done by considering the lung as an network of rigid tubes. In this model it is possible to estimate the equations of fluid mechanics. Therefor, the Bernoulli equation is used, in which the friction losses, the losses of changes in the flow and the inertia of the fluid are regarded in additional terms. Also the elasticity of alveolar area should be taken into account.

The system of nonlinear equations, that is developed in this way, should be solved numerically. The development and the resolving is implemented through the programming language C++. Points of interest are the computational time and the requirement of memory space. That is important, because the model will later be used as boundary condition, so it will be performed in every time step.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Theoretische Grundlagen | 6 |
| 2.1 | Physiologische Grundlagen | 6 |
| 2.1.1 | Topologie der Lungengeometrie | 7 |
| 2.1.2 | Spontane Atmung und maschinelle Beatmung | 9 |
| 2.2 | Strömungsmechanische Grundbegriffe | 11 |
| 2.2.1 | Grundgleichungen und Parameter | 11 |
| 2.2.2 | Exakte Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen | 13 |
| 2.2.3 | Parameterraum der Beatmungsfälle | 19 |
| 3 | Aufbau des Modells | 21 |
| 3.1 | Bestimmung der Verlustkoeffizienten | 21 |
| 3.1.1 | Verluste durch Reibung und Trägheit | 21 |
| 3.1.2 | Verlust durch Verzweigungen | 23 |
| 3.2 | Umsetzung des Modells | 24 |
| 3.2.1 | Aufstellen des Gleichungssystems | 26 |
| 3.2.2 | Ausflussrandbedingung | 29 |
| 3.3 | Lösen des Gleichungssystems | 32 |
| 3.4 | Elastizität | 35 |
| 3.5 | Modell komplexer Widerstände | 37 |
| 3.5.1 | Prinzip des Modells | 38 |
| 4 | Implementierung | 40 |
| 4.1 | Aufstellen der Gleichungen (Funktion <code>setGlSys</code>) | 44 |
| 4.2 | Aufbau der Jacobi-Matrix (Funktion <code>setJac</code>) | 47 |
| 4.3 | Lösen des Gleichungssystems (Funktion: <code>solveGlSys</code>) | 50 |
| 4.4 | Numerische Bestimmung von Ableitungen und Integralen | 50 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5 | Ergebnisse und Auswertung | 54 |
| 5.1 | Konvergenzbetrachtung | 54 |
| 5.2 | Untersuchungen an einem einzelnen Bronchus | 57 |
| 5.3 | Untersuchung einer einzelnen Verzweigung | 62 |
| 5.4 | Untersuchung von Bronchialbäumen | 73 |
| 5.5 | Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf | 82 |
| 5.6 | Nicht-sinusförmige Volumenströme | 87 |
| 6 | Zusammenfassung und Ausblick | 91 |
| | Literaturverzeichnis | 95 |
| A | Anhang - Quellcode Listings | XIV |
| A.1 | Funktion setGlSys | XIV |
| A.2 | Funktion setJac | XVIII |
| A.3 | Funktion solveGlSys | XXII |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Verschiedene Darstellungen der menschlichen Lunge. (a) Gussmodell der menschlichen Lunge aus Kunststoff mit den Atemwegen (gelb), den Lungenarterien (rot) und den Lungenvenen (blau), entnommen von Weibel [30]. (b) Generisches, symmetrisches Modell des Bronchialbaumes nach Weibel [31]. | 7 |
| 2.2 | Geometrische Abmessungen der Atemwege nach Weibel [31] in Abhängigkeit der Generation z für den gesamten Bronchialbaum von Generation null bis 23. | 9 |
| 2.3 | Skizze eines generischen Bronchus, entnommen von Feldmann <i>et al.</i> [5], mit einer vom Radius und der Zeit abhängigen Geschwindigkeit (blau dargestellt). | 12 |
| 2.4 | Dimensionslose Geschwindigkeitsprofile in einem generischen Bronchus (blau), bezogen auf einen oszillierenden Druckgradienten (rot), ermittelt nach Gleichung (2.12) bei verschiedenen Womersley-Zahlen nach Feldmann <i>et al.</i> [5]. | 15 |
| 2.5 | Parameterbereich verschiedener Beatmungsfälle in den einzelnen Generationen eines Bronchialbaumes (Symbole) und einer Stabilitätsgrenze, entnommen von Feldmann <i>et al.</i> [5]. | 20 |
| 3.1 | Kräftebilanz am Volumenelement der Länge l und des Durchmessers D für die Fluidsäule einer oszillierenden Strömung. | 22 |
| 3.2 | Fallunterscheidung für die Strömung an einer Verzweigung von Bronchien | 24 |
| 3.3 | Diskrete Druckwerte bei einzelnen Bronchien. | 25 |
| 3.4 | Reihenschaltung einzelner Bronchien zu einer einfachen Verzweigung mit diskreten Werten für den Volumenstrom und den Druck. | 25 |
| 3.5 | Schematische Darstellung des Bronchialbaumes über drei Generationen in nicht maßstabsgetreuer Darstellung nach Weibel [31], mit den in Abschnitt 3.2 eingeführten Bezeichnungen. | 27 |
| 3.6 | Schematische Darstellung eines Ballons am Ende eines Bronchus mit dem volumenabhängigen Druck $p(V)$ | 30 |

| | | |
|-----|--|----|
| 3.7 | Dynamische Druck-Volumen-Beziehung bei der Inspiration (blau), der Expiration (rot) und der Ruhedehnungskurve (grün), entommen von Silbernagl <i>et al.</i> [24]. | 31 |
| 3.8 | Druckverlauf in einer einfachen Verzweigung mit druckunabhängiger Fläche. | 36 |
| 3.9 | Druckverlauf in einer einfachen Verzweigung mit druckunabhängiger Fläche (p_0 und p_1) im Vergleich zum Verlauf mit druckabhängiger Fläche (p_0 mit $A(p)$ und p_1 mit $A(p)$). | 37 |
| 4.1 | Struktogramm mit den wichtigsten Arbeitsschritten zur Bestimmung des Druckverlustes in einem beliebigen Bronchialbaum | 41 |
| 4.2 | Besetzungsstruktur der Jacobi-Matrix für einen Bronchialbaum über vier Generationen. Die horizontale Nummerierung stellt die Spaltenindizes dar, die vertikale die Zeilenindizes. Die grün markierten Zellen bezeichnen einen Eintrag $\neq 0$, alle anderen Zellen haben den Eintrag 0 | 48 |
| 4.3 | Verlauf eine sinusförmigen Volumenstroms, sowie dessen Ableitung und das Volumen über eine gesamte Periode | 51 |
| 4.4 | Maximaler Fehler der Rückwärtsdifferenz und der Summation bei der Bestimmung mit verschiedenen zeitlichen Diskretisierungen. | 52 |
| 5.1 | Darstellung der maximalen Residuen des Gauss-Newton-Verfahrens über 20 Iterationen bei der Berechnung der Fälle eins bis vier. | 56 |
| 5.2 | Maximale Druckamplitude im Verlauf einer Periode der oszillierenden Rohrströmung, normiert auf die Lösung einer voll ausgebildeten, laminaren Strömung (Hagen-Poiseuille-Strömung). | 58 |
| 5.3 | Relativer Fehler des Bernoulli- und Impedanz-Modells im Vergleich zur analytischen Lösung, bei verschiedenen Womersley-Zahlen. | 59 |
| 5.4 | Berechneter Phasenversatz der verschiedenen Modelle bei unterschiedlichen Womersley-Zahlen. | 60 |
| 5.5 | Absoluter Fehler des Phasenversatzes der Modelle, bezogen auf die analytische Lösung und normiert auf 90° | 61 |
| 5.6 | $Re=1, Wo=1$ | 63 |
| 5.7 | $Re=20000, Wo=1$ | 63 |
| 5.8 | $Re=1, Wo=50$ | 64 |
| 5.9 | $Re=20000, Wo=50$ | 64 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.10 | Druckverluste in Abhängigkeit vom Volumestrom. Kurve 1: Reibungsverluste, Kurve 2: Druckverluste Reibung und Trägheit, Kurve 3: Summe aller Druckverluste (Reibung, Trägheit und Verzweigungen). | 66 |
| 5.11 | Vorgebene Geschwindigkeiten einer dreidimensionalen Simulation (Punkte) und als Sinusform für das Bernoulli-Modell (Kurve) am Einlass einer einfachen Verzweigung. | 67 |
| 5.12 | Berechnete Druckwerte am Einlass einer einfachen Verzweigung mit den Parametern $Re = 248,17$ und $Wo = 2$ | 68 |
| 5.13 | Sinusförmiger Volumenstrom mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass (p_0) und an der Verzweigungsstelle (p_1). | 69 |
| 5.14 | Verteilung der normierten Geschwindigkeiten in einer einfachen Verzweigung im ersten Zeitschritt, bei der Vorgabe von asymmetrischen Druckwerten. | 70 |
| 5.15 | Verlauf der diskreten Druckwerte einer einfachen Verzweigung, dargestellt über zwei Perioden. | 71 |
| 5.16 | Verlauf der diskreten Druckwerte einer einfachen Verzweigung für die ersten zwei Perioden. | 72 |
| 5.17 | Verlauf der Volumenströme einer einfachen Verzweigung für die ersten zwei Perioden. | 72 |
| 5.18 | Druckverlauf bei unterschiedlicher Baumtiefe mit den charakteristischen Parametern $Re = 21875,3$ und $Wo = 19,36$ am Einlass, normiert auf die maximale Druckamplitude der Rechnung 2. | 73 |
| 5.19 | Symmetrisch verteilte Bereiche des Bronchialbaumes für die Vorgabe von Compliance-Werten, Bereich A für die linke Seite, Bereich B für die rechte. | 74 |
| 5.20 | Verlauf des Druckes am Einlass eines Bronchialbaumes über 19 Generationen bei der Vorgabe verschiedener Druckrandbedingungen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1a. | 75 |
| 5.21 | Verlauf der Druckwerte für die Randbedingung für die Rechnung 1a in jedem Zeitschritt, normiert auf deren maximale Druckamplitude. | 76 |
| 5.22 | Verlauf der Druckwerte in Generation zwei eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1b (linke Seite). | 77 |
| 5.23 | Verlauf der Druckwerte in Generation zwei eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1b (rechte Seite). | 78 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|---|----|
| 5.24 | Verlauf der Druckwerte in Generation 17 eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1b (linke Seite). | 78 |
| 5.25 | Verlauf der Druckwerte in Generation 17 eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1b (rechte Seite). | 79 |
| 5.26 | Verlauf der Volumenströme in Generation eins und zwei eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms (linke Seite). | 80 |
| 5.27 | Verlauf der Volumenströme in Generation eins und zwei eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms (rechte Seite). | 80 |
| 5.28 | Verlauf der Volumenströme in Generation 17 eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms (linke Seite). | 81 |
| 5.29 | Verlauf der Volumenströme in Generation 17 eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms (rechte Seite). | 81 |
| 5.30 | Verlauf eines Volumenstroms in Generation zehn eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms. | 82 |
| 5.31 | Verlauf eines Druckwertes in Generation zehn eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des Druckes am Einlass. 82 | |
| 5.32 | Sinusförmiger Volumenstrom mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass. . . | 88 |
| 5.33 | Volumenstrom a) mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass. | 89 |
| 5.34 | Volumenstrom b) mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass. | 89 |
| 5.35 | Volumenstrom c) mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass. | 90 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | HFOV Beatmungsfälle nach Hager <i>et al.</i> [7] im Vergleich zur spontanen Atmung | 11 |
| 5.1 | Speicherplatzbedarf der Algorithmen | 83 |
| 5.2 | Rechenzeitbedarf der Algorithmen | 84 |
| 5.3 | Rechenzeit des UMFPACK-Lösers | 85 |
| 5.4 | Rechenzeit des Gesamtmodells | 86 |
| 5.5 | Speicherplatz des Gesamtmodells | 86 |

Nomenklatur

Abkürzungen

| | | |
|--------|--|----------------------------------|
| Bif | Funktion für den Druckverlust durch Verzweigungen (bifurcation losses) | — |
| CFD | numerische Strömungssimulation | — |
| CO_2 | Kohlenstoffdioxid | — |
| CT | Computertomographie | — |
| DLR | Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. | — |
| Fric | Funktion für den Druckverlust durch Reibung (friction losses) | — |
| GT | Generationstiefe | — |
| h | Dimensionslose Schrittweite | — |
| HFOV | Hochfrequenzbeatmung | — |
| Ine | Funktion für den Druckverlust durch Trägheit (inertia losses) | — |
| k | Iterationsschritt | — |
| m | Anzahl der Matrixeinträge | — |
| n | Anzahl der Unbekannten | — |
| O_2 | Sauerstoff | — |
| RZ | Rechenzeit | — |
| s | absoluter Fehler (normiert) | — |
| SP | Speicherbedarf | — |
| tk | Zeitschritt | — |
| Z | Impedanz | kg/m ⁴ s ² |
| $z(t)$ | Impedanz im Zeitbereich | — |
| z | Index für die aktuelle Generation | — |

Tabellenverzeichnis

Geometrie Größen

| | | |
|-----------|---|--------------|
| A | Querschnittsfläche | m^2 |
| d'_0 | angepasster Ausgangsdurchmesser im Weibelmodell | m |
| d_0 | Ausgangsdurchmesser im Weibelmodell | m |
| l'_0 | angepasste Ausgangslänge im Weibelmodell | m |
| l_0 | Ausgangslänge im Weibelmodell | m |
| l_{ref} | Referenzlänge | m |
| l | Länge | m |
| R | Rohrradius | m |
| r | momentaner Radius | m |

Symbole

| | | |
|----------------|-------------------|------------|
| $\vec{\Delta}$ | Laplace-Operator | — |
| ϵ | Abbruchkriterium | — |
| F | Kraft | N |
| i | imaginäre Einheit | — |
| J | Jacobi-Matrix | — |
| J_0 | Besselfunktion | — |
| $\vec{\nabla}$ | Nabla-Operator | — |
| π | Kreiszahl | — |
| t | Zeit | s |
| \vec{r} | Residuenvektor | — |
| \vec{x} | Unbekanntenvektor | — |

Materialgrößen

| | | |
|--------|-------------------------|------------------------|
| η | dynamische Viskosität | Ns/m^2 |
| ν | kinematische Viskosität | m^2/s |
| ρ | Dichte | kg/m^3 |
| Comp | Compliance | m^3/Pa |
| L | Trägheit | kg/m^4 |

Tabellenverzeichnis

Strömungsgrößen

| | | |
|-----------|--|----------------------|
| λ | Rohrreibungszahl | — |
| ω | Kreisfrequenz | /s |
| Re | Reynolds-Zahl | — |
| Wo | Womersley-Zahl | — |
| ζ | Verlustbeiwert für Strömungen | — |
| C | Druckamplitude | Pa |
| c | komplexe Wellengeschwindigkeit | m/s |
| g | Produkt aus Wellengeschwindigkeit und Compliance | m ⁵ /s/kg |
| Ma | Mach-Zahl | — |
| p | Druck | Pa |
| u | Geschwindigkeit | m/s |
| u_{ref} | Referenzgeschwindigkeit | m/s |
| V | Volumen | m ³ |
| \dot{V} | Volumenstrom | m ³ /s |

1 Einleitung

Die menschliche Atmung ist ein sehr komplizierter Vorgang, bei dem ein Gasaustausch zwischen dem menschlichen Organismus und der Umwelt stattfindet. Dabei wird Sauerstoff (O_2) durch konvektiven Transport in die Lunge geleitet. Der Transport in den distalen Atemwegen erfolgt dagegen durch diffusive Vorgänge. In den Lungenbläschen diffundiert O_2 in die Kapillaren und Kohlenstoffdioxid (CO_2) in die Lungenbläschen zurück. Die mit CO_2 angereicherte Luft wird anschließend wieder aus den Atemwegen heraus transportiert. Ausführliche Informationen zur Physiologie der Atmung finden sich z.B. bei Silbernagl *et al.* [24].

Durch die Inspiration und Expiration der Atemgase entsteht in den Atemwegen eine oszillierende Strömung. Weil eine Untersuchung und Beschreibung des konvektiven Transports enorm zum Verständnis der Strömungsverhältnisse beiträgt, befasst sich die vorliegende Arbeit ausschließlich mit den konvektiven Vorgängen. Das Verstehen dieser Prozesse soll dazu dienen, maschinelle Beatmungsformen und damit auch die Behandlungsmöglichkeiten von Patienten zu verbessern. Besonders im Bereich der Hochfrequenzbeatmung (HFOV) fehlt es z.B. an Informationen über die Einstellung der Parameter an Beatmungsgeräten, da während der HFOV-Beatmung Pendellufteffekte auftreten, welche einen starken Einfluss auf die Verteilung der Atemgase in der Lunge haben. Diese Effekte treten bei spontaner Atmung nicht auf.

Die Optimierung der maschinellen Beatmungsverfahren weist ein großes Potential für die effektivere und schonendere Beatmung von Patienten auf. Daher sind die strömungsmechanischen Untersuchungen der menschlichen Atmung und der Beatmungsverfahren Gegenstand der aktuellen Forschung. In der Arbeit von Krishnan & Brower [14] wurde gezeigt, dass bei schweren Erkrankungen der Atemwege, wie z.B. dem akuten progressiven Lungenversagen (ARDS), mittels HFOV-Beatmung gute klinische Ergebnisse erzielt werden. Die Erfahrungen mit dieser Beatmungsform sind zwar noch begrenzt, zeigen jedoch bereits gleichwertige Ergebnisse wie die der herkömmlichen maschinellen Beatmung. Informationen zu klinischen Tests mit HFOV-Beatmungen finden sich auch bei Müller *et al.* [18]. Um die Mechanismen des Gastransports sowohl bei spontaner Atmung als auch bei

maschineller Beatmung besser zu verstehen, hat die Anzahl der experimentellen Untersuchungen stark zugenommen. Die menschliche Lunge bietet jedoch nur eingeschränkt Zugang für experimentelle Untersuchungen, weshalb sich die Experimente auf Modelle beschränken, welche die Lungengeometrie realistisch nachbilden. In der Arbeit von Adler & Brücker [1] wurde ein vergrößertes Silikonmodell der ersten sechs Generationen der menschlichen Lunge angefertigt und die darin auftretenden Strömungsverhältnisse untersucht. Die Arbeit zeigt die Schwierigkeiten, welche bei einer experimentellen Untersuchung der Strömungen auftreten, denn Modelle der Lunge bieten nur bedingt einen Zugang für Messungen. Das Anbringen einer Messapparatur innerhalb des Lungenmodells, würde die Strömungsvorgänge maßgeblich beeinflussen. Das von Adler & Brücker verwendete Modell ist transparent und als Messmethode wurden optische Messverfahren (Particle Image Velocimetry) verwendet. Als strömendes Fluid wurde Wasser betrachtet. Ein ähnliches Vorgehen findet sich bei Scholz *et al.* [23], wobei hier Luft als strömendes Fluid und ein maßstabsgetreues Lungenmodell verwendet wurde. Mittels Magnetic Resonance Imaging (MRI) und Kontrastgasen wurde die Strömung in einem Gussmodell der Lunge untersucht. Die Schritte zur Fertigung eines solchen Modells sind z.B. bei Krenkel *et al.* [13] erläutert. Ausgehend von medizinischen Bilddaten, wird die Geometrie der Lunge detailgetreu rekonstruiert und aufbereitet. Die Daten dienen unter anderem der Erstellung von Gussmodellen durch Rapid Prototyping, aber auch um numerische Simulationen in realistischen Geometrien zu ermöglichen. Die distalen Atemwege wurden jedoch in keinem der Modelle aufgelöst, da die Fertigung eines solchen Modells erhebliche Schwierigkeiten aufweist.

Aufgrund der sehr kleinen, unregelmäßigen Geometrie, ist die pulmonale Luftströmung sehr komplex. Das macht die Ergänzung solcher Experimente mit numerischen Simulationen unerlässlich. Es wurde bereits eine Vielzahl von numerischen Simulationen in Verzweigungen, welche den Geometrien der pulmonalen Atemwegen entsprechen, durchgeführt. Nur wenige dieser Simulationen berücksichtigen dabei hohe Frequenzen, wie sie bei der HFOV-Beatmung auftreten. Die wohl aktuellsten und ausführlichsten Simulationen stammen von Choi *et al.* (2010) [3] und Wall *et al.* (2010) [29]. Beide verwenden eine zeitabhängige Randbedingung für das Geschwindigkeitsfeld mittels eines vorgeschriebenen Profils. Choi verwendet ein Finite-Volumen-Verfahren, Wall hingegen ein Finite-Differenzen-Verfahren. Unter HFOV-Bedingungen tritt in den Atemwegen Strömungsumkehr und Gegenströmung auf, wie sie bei hohen Womersley-Zahlen typisch sind. Durch die komplexe Geometrie erhöht sich auch die Komplexität des Strömungsfeldes und de-

ren Einfluss auf den Gastransport. In beiden Simulationen werden nur die ersten sieben Generationen des Bronchialbaumes dargestellt und untersucht. Für die nicht aufgelösten Bereiche wird ein eindimensionales Modell mittels 1D-3D-Kopplung als Randbedingung verwendet.

Für die Implementierung solcher Randbedingungsmodelle existieren verschiedene Lösungsansätze. Die Arbeiten von Olufsen *et al.* [19, 20] befassen sich mit einem ähnlichen Bereich der Biofluiddynamik, der Untersuchung von Blutströmungen. Bei der Blutströmung handelt es sich ebenfalls um eine Form von oszillierenden Strömungen, den pulsierenden Strömungen. Da diese Art von Strömungen stark von der Frequenz der Oszillation bzw. Pulsation abhängt, werden die Untersuchungen im Frequenzbereich durchgeführt. Durchströmte Geometrien, wie z.B. Blutgefäße oder Atemwege, setzen der Strömung einen Widerstand entgegen. Ist dieser Widerstand frequenzabhängig, wird er als Impedanz bezeichnet. Bei Olufsen wurde aus den Einzelimpedanzen der Gefäße, eine Gesamtimpedanz des Blutkreislaufs ermittelt, die dem sich ausbreitenden Fluid entgegenwirkt. Aufgrund der geometrischen Ähnlichkeit der von Olufsen verwendeten Modelle, haben Comerford *et al.* [4] das Modell auf die Strömung in der Lunge angepasst. Dabei wird für jeden Bronchus eine Impedanz berechnet, aus denen die Gesamtimpedanz des Bronchialbaumes ermittelt wird. Das Ergebnis der Arbeit zeigt, dass die distalen Atemwege einen signifikanten Einfluss auf den Druck im oberen Teil der Lunge haben, wobei der Einfluss auf die Strömung gering ist. Ein großer Vorteil des von Comerford umgesetzten Modells liegt in der Berücksichtigung des elastischen Verhaltens des Lungengewebes. Es wird in den Impedanzen der Bronchien berücksichtigt. Es erweist sich jedoch als nahezu unmöglich, geeignete Parameter für das Materialverhalten des Lungengewebes zu finden, da die Materialgesetze nicht-linear vom Druck und der Generation des Bronchialbaumes abhängen. Sowohl das Modell von Olufsen, als auch das von Comerford, bauen auf der analytischen Lösung einer oszillierenden Rohrströmung von Womersley [32] auf. Diese ist für sinusförmige Druckverläufe hergeleitet und ermöglicht daher nur schwer eine Aussage über nicht-sinusförmige Verläufe.

Ein weiteres eindimensionales Modell wurde von Soodt *et al.* [25] umgesetzt. Hier wird eine mechanische Energieerhaltungsgleichung in einem eindimensionalen Strömungsfeld abgeleitet, welche auf der Bernoulli-Gleichung basiert. In dem Modell werden fluidmechanische Effekte erfasst, die zu einem Druckverlust führen. Dazu zählen die Reibung und die Trägheit des Fluids. Der Fokus der Studie liegt auf der dynamischen Verteilung des statischen Druckes in einem mehrfach verzweigten Netzwerk durch spontane Volumenänderungen in einzelnen Bereichen (Bronchien), jedoch werden nur die ersten

sechs Generationen eines Bronchialbaumes betrachtet. Dafür wird den Bronchien ein nicht-linear elastisches Materialverhalten vorgegeben das zunächst an ein Mooney-Rivlin-Material angelehnt ist. Als Randbedingung dienen elastische Ballons mit einem ähnlichen Materialverhalten. Das Ergebnis liefert die räumliche Druckverteilung im Netzwerk sowie die dominierenden Strömungen. Außerdem wurde das Verhalten experimentell untersucht, um eine Validierung des numerischen Modells vornehmen zu können. Mit den Experimenten wurde das elastische Lungenverhalten charakterisiert, analytisch beschrieben und numerisch implementiert.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung und Implementierung eines eindimensionalen Modells, welches auf der Bernoulli-Gleichung basiert und die konvektive Strömung in der Lunge beschreibt. Das Modell soll anschließend als Randbedingung für numerische Strömungssimulationen (CFD) dienen. Darüber hinaus sollen Abschätzungen von Druckverlusten eines Bronchialbaumes vorgenommen werden. Die bereits angesprochenen Druckverluste durch Reibung und Trägheit des Fluids werden über Zusatzterme berücksichtigt. Einen weiteren Druckverlust, welcher an den Verzweigungsstellen des Bronchialbaumes auftritt, wird ebenfalls über einen Zusatzterm in das Modell eingebracht. Dieser Druckverlust wurde bisher in keinem Modell berücksichtigt. Als Ausflussrandbedingung des Modells dient ein volumenabhängiger Druck, der das elastische Verhalten des Alveolarbereiches und der nicht aufgelösten Generationen des Bronchialbaumes modelliert.

Um die Problemstellung einer Betrachtung mit der Bernoulli-Gleichung zugänglich zu machen, werden in Abschnitt 2 die nötigen Grundlagen bereitgestellt und verschiedene Annahmen getroffen. Neben einer eindimensionalen Betrachtung, wird die Strömung zu jedem Zeitpunkt als laminar und inkompressibel angenommen. Mit diesen Annahmen wird in Abschnitt 3 die Bernoulli-Gleichung mit einer einfachen Struktur abgeleitet, welche trotzdem lungenspezifische Effekte berücksichtigt. Wenn diese Gleichung auf jeden einzelnen Bronchus angewendet wird, entsteht ein Gleichungssystem, welches anschließend gelöst wird. Dazu muss ein geeigneter Löser programmiert werden, was in Abschnitt 4 beschrieben ist. Wichtige Faktoren dabei sind der Rechenzeit- und der Speicherplatzbedarf, auf die in Abschnitt 5.5 eingegangen wird. Weiterhin werden die Ergebnisse ausgewertet und diskutiert. In Abschnitt 5.2 wird das Modell an einem einzelnen Bronchus getestet und die Ergebnisse mit anderen Lösungsansätzen verglichen. In Abschnitt 5.3 folgt die Untersuchung der Strömung in einer einzelnen Verzweigung. Die Ergebnisse werden

KAPITEL 1. EINLEITUNG

mit einer dreidimensionalen Strömungssimulation verglichen und diskutiert. Abschließend werden in Abschnitt 5.4 Bronchialbäume untersucht, um die Möglichkeiten des Modells zu bewerten.

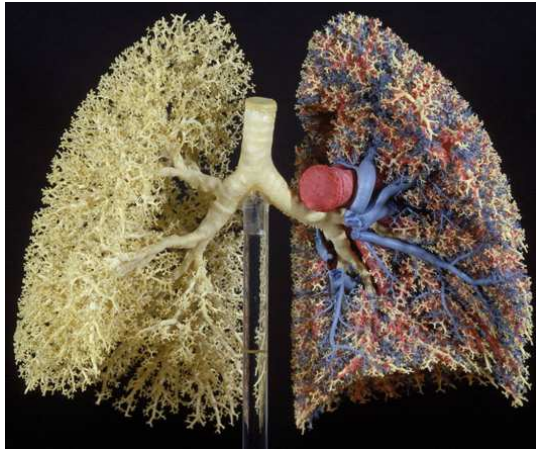
2 Theoretische Grundlagen

Um die oszillierende Ventilation in der Lunge möglichst realistisch beschreiben zu können, wird ein strömungsmechanisches Modell mit geometrischen Randbedingungen benötigt. Die dafür nötigen Grundlagen werden in diesem Abschnitt aufbereitet.

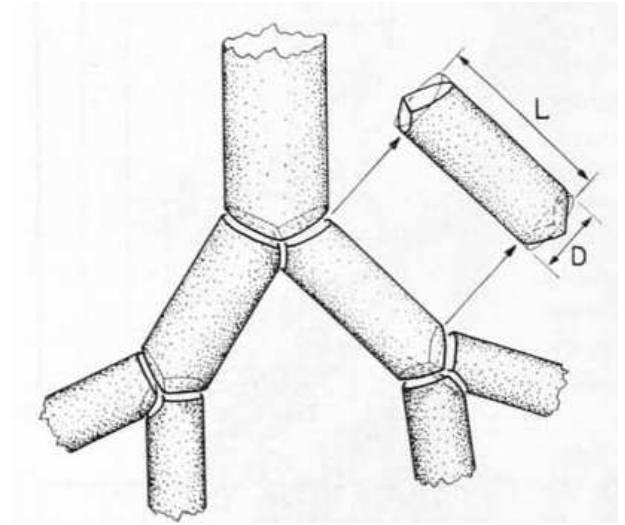
2.1 Physiologische Grundlagen

Die menschlichen Atemwege weisen eine sehr komplexe Topologie auf, wie Abbildung 2.1(a) beispielhaft zeigt. Während der Inspiration strömt Luft über den Mund oder die Nase in den Rachen (Pharynx) und den Kehlkopf (Larynx). Dort markieren die Stimmlippen (Plicae vocales) die Grenze zwischen oberen und unteren Atemwegen. Unterhalb des Larynx beginnt die Luftröhre (Trachea), die sich an der Bifurcatio tracheae in den rechten und den linken Hauptbronchus (Bronchus principalis dexter et sinister) teilt. Der Bronchus principalis dexter teilt sich weiter in drei und der Bronchus principalis sinister in zwei Lappenbronchien (Bronchi lobares) auf. Diese verzweigen sich als Bronchialbaum in immer enger werdende Röhren zu den einzelnen Segmentbronchien (Bronchi segmentales). Von dort strömt die Luft weiter über die Läppchenbronchien (Bronchi lobulares) bis zu den Bronchioli, in deren Wänden sich bereits teilweise Lungenbläschen (Alveolen) befinden, während die distal folgenden Alveolargänge (Ductus alveolares) nur noch aus Alveolen gebildet werden.

Der Transport der Atemgase durch die gesamten Atemwege lässt sich funktionell in einen konvektiven und einen diffusiven Bereich unterscheiden. Die Gesamtheit des luftleitenden Teils wird als Bronchialsystem (Bronchialbaum) bezeichnet. Die Diffusion zwischen Luft- und Blutkreislauf erfolgt in den Alveolen. Genauere Informationen zur Anatomie und Physiologie der Lunge sind zum Beispiel bei Lippert *et al.* [16], Baumhoer *et al.* [2] oder Silbernagl *et al.* [24] aufgeführt.



(a) Gussmodell



(b) Weibelmodell

Abbildung 2.1: Verschiedene Darstellungen der menschlichen Lunge. (a) Gussmodell der menschlichen Lunge aus Kunststoff mit den Atemwegen (gelb), den Lungenarterien (rot) und den Lungenvenen (blau), entnommen von Weibel [30]. (b) Generisches, symmetrisches Modell des Bronchialbaumes nach Weibel [31].

2.1.1 Topologie der Lungengeometrie

Zur Abbildung der Topologie des Bronchialbaumes, existieren bereits verschiedene Konzepte. Es gibt Verfahren, welche eine detailgetreue Rekonstruktion der Geometrie vornehmen. In der Arbeit von Tawhai *et al.* [26] werden bildgebende Verfahren benutzt, um die Topologie darzustellen. Bei Krenkel *et al.* [13] sind die Arbeitsschritte aufgezeigt, welche von bildgebenden Verfahren aus der Medizin zu einem Modell des Bronchialbaumes führen. Beide Nachbildungen sind sehr realistisch, jedoch auch sehr aufwendig.

Eine der ältesten Untersuchungen auf diesem Gebiet wurde von Weibel bereits in den 60er Jahren durchgeführt [31]. Hier wird eine Vereinfachung vorgenommen, für die jeder einzelne Bronchus als gerades, steifes Rohrelement betrachtet wird. So wird die komplexe Lungengeometrie auf einfache Weise für Berechnungen zugänglich gemacht, die Geometrie der Lunge wird jedoch nicht realistisch dargestellt. Die Aufteilung in weitere Bronchien erfolgt stets durch eine symmetrische Verzweigung, auch Bifurkation genannt, was in Abbildung 2.1(b) veranschaulicht ist. Der Verzweigungswinkel zwischen den beiden Bronchien wird nach Horsefield *et al.* [11] auf 70° festgelegt. Geometrische Parameter eines

KAPITEL 2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Bronchus bilden dabei die Länge und der Durchmesser. Die Einteilung erfolgt in Generationen wobei die Trachea der Generation null entspricht. Nach der ersten Teilung befindet man sich in Generation eins usw. Die Teilung setzt sich bis in die 23. Generation fort. Um nun die charakteristischen Werte zu bestimmen, wurden von Weibel verschiedene Lungen von erwachsenen Männern untersucht. Dazu wurden diese Lungen ausgegossen und anschließend das umgebende Lungengewebe entfernt. In dem so entstandenen Gussmodell konnten nun die einzelnen Bronchien vermessen und statistisch ausgewertet werden. Das Ergebnis dieser Vermessungen ist eine Beschreibung der Bronchien-Parameter als Funktion der betrachteten Generation. Die Gleichungen lauten

$$l_1(z) = l_0 \cdot e^{-0.92 \cdot z} \quad (2.1)$$

$$d_1(z) = d_0 \cdot e^{-0.388 \cdot z}, \quad (2.2)$$

für die Generationen null bis einschließlich Generation drei, wobei $l_0 = 120$ mm die Ausgangslänge und $d_0 = 18$ mm den Ausgangsdurchmesser darstellt. Mit z wird die aktuelle Generation bezeichnet. Ab der vierten Generation gelten die Gleichungen

$$l_2(z) = l'_0 \cdot e^{-0.17 \cdot z} \quad (2.3)$$

$$d_2(z) = d'_0 \cdot e^{-(0.293 - 0.0062 \cdot z) \cdot z}, \quad (2.4)$$

wobei $l'_0 = 25$ mm die angepasste Ausgangslänge und $d'_0 = 12$ mm den angepassten Ausgangsdurchmesser darstellt. In Abbildung 2.2 ist der Verlauf von Durchmesser, Länge und der durchströmten Querschnittsfläche über den Generationen aufgezeigt. Hier wird eine physiologisch nicht vorhandene Unstetigkeit im Verlauf der Länge, die aus der Verwendung unterschiedlicher Gleichungen resultiert, erzeugt, deren Auswirkungen auf die Lösung jedoch vernachlässigbar sind. Der Durchmesser hingegen sinkt stetig von Generation zu Generation, wobei die durchströmte Querschnittsfläche einer Generation erst sinkt und ab Generation vier ansteigt.

Die Gleichungen liefern keine exakten Werte für die geometrischen Parameter, sondern betrachten einen statistischen Mittelwert der untersuchten Lungen.

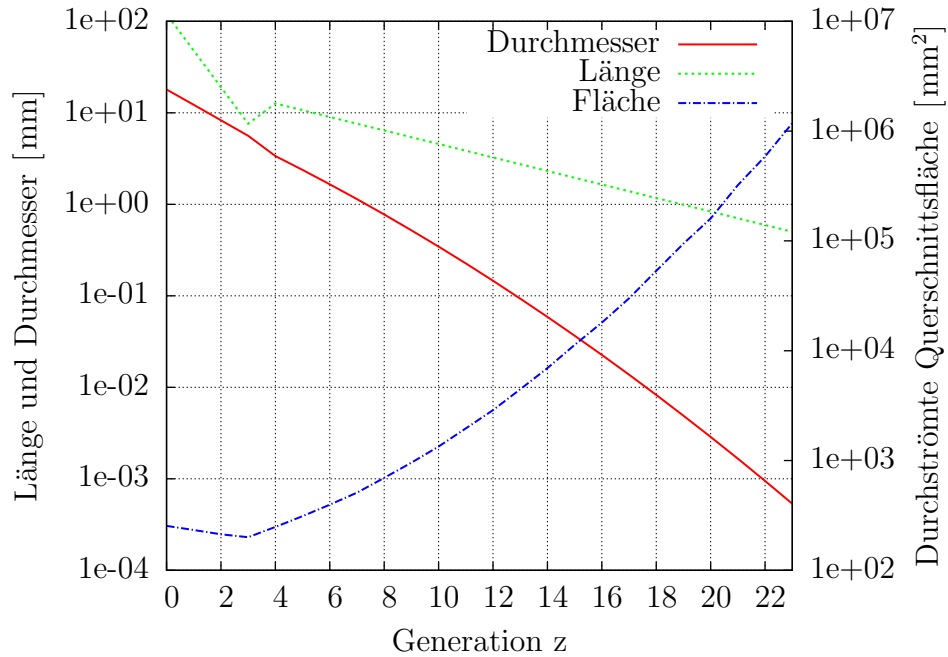


Abbildung 2.2: Geometrische Abmessungen der Atemwege nach Weibel [31] in Abhängigkeit der Generation z für den gesamten Bronchialbaum von Generation null bis 23.

Mit diesen Werten ist es möglich, ein Modell der menschlichen Lunge zu erstellen, welches den Bronchialbaum auf einfache Weise einer Berechnung zugänglich macht und somit ideal für eine eindimensionale Betrachtung geeignet ist.

Während die Trachea einen Durchmesser von 18 mm und eine Länge von 120 mm aufweist, liegen diese Werte für die 23. Generation bei 0,5 μm bzw. 0,5 mm. Deshalb muss ein breites Spektrum von Größenordnungen betrachtet werden. Diese Variante der geometrischen Modellierung setzt eine Symmetrie in allen Röhren einer Generation voraus. Es existieren auch andere Modelle, welche die Möglichkeit bieten, eine asymmetrische Verteilung zu berücksichtigen. Im Verlauf dieser Arbeit werden jedoch ausschließlich die Werte von Weibel benutzt und weiterhin als Weibelmodell bezeichnet. Die Verwendung von asymmetrischen Modellen ist wesentlich aufwendiger und im Rahmen einer Masterarbeit nicht abzuarbeiten.

2.1.2 Spontane Atmung und maschinelle Beatmung

Die natürliche bzw. spontane Atmung stellt einen Gasaustausch zwischen Umwelt und Alveolen dar. Dabei strömt Luft in die Lunge (Inspiration) bzw. aus der Lunge heraus

KAPITEL 2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

(Expiration), wobei die Inspiration von Zwerchfell und Brustkorb, die Expiration von Brustkorb und Lunge gesteuert wird. Zur Inspiration müssen sowohl die Reibungswiderstände im Bronchialbaum (Resistance) als auch die elastischen Retraktionskräfte von Lunge und Thorax (Compliance) überwunden werden. Bei der Expiration geht die Lunge u.a. durch elastische Rückstellkräfte in ihre Ausgangsposition zurück.

Die funktionelle Trennung der Atemwege in konvektiven und diffusiven Transport hängt sowohl von der Geometrie als auch von der Strömungssituation ab. Im Weibelmodell kann diese Trennung, abhängig von der Strömungsgeschwindigkeit, zwischen den Generationen 16 und 19 vorgenommen werden. Die treibende Druckkraft ergibt sich aus einer Druckdifferenz zwischen den Alveolen und der Umwelt und liegt bei der spontanen Atmung bei ca. 100 Pa. Das Tidalvolumen, welches bei einem Atemzyklus ein- und ausgeatmet wird, liegt bei etwa 0,5 l. Eine typische Atemfrequenz liegt bei ca. 0,2 Hz. Genauere Informationen zur Atemmechanik finden sich z.B. bei Silbernagl *et al.* [24], Hammer *et al.* [8] oder Lippert *et al.* [16].

Während der mechanischen Beatmung wird die natürliche Atmung unterstützt oder auch vollständig ersetzt. Hierfür existieren verschiedene Beatmungsformen, welche entweder druck- oder volumengesteuert sind. Einen Spezialfall bildet die HFOV-Beatmung. Diese ist durch hohe Beatmungsfrequenzen bei niedrigen Druckamplituden und Tidalvolumen gekennzeichnet. Anhand von Messungen von Hager *et al.* [7] während HFOV-Beatmungen, wurden verschiedene Beatmungsfälle erstellt. Aus diesen Beatmungsfällen und dem Weibelmodell wurden von Feldmann *et al.* [5] typische Geschwindigkeiten im Bronchialbaum ermittelt. Tabelle 2.1 zeigt beispielhaft die Geschwindigkeit in der Trachea für verschiedene HFOV-Beatmungsfälle. Die maximale Geschwindigkeit tritt jedoch nicht in der Trachea auf, sondern in der Generation mit der niedrigsten, durchströmten Gesamtfläche. Wie aus Abbildung 2.2 ersichtlich wird, ist das bei Generation drei der Fall.

Tabelle 2.1: HFOV Beatmungsfälle nach Hager *et al.* [7] im Vergleich zur spontanen Atmung

| Fall | Geschwindigkeit \bar{u} in m/s nach Weibel | Frequenz in Hz |
|-----------------|--|----------------|
| spontane Atmung | 2,0 | 0,2 |
| HFOV 1 | 5,7 | 4 |
| HFOV 2 | 9,8 | 12 |
| HFOV 3 | 19,8 | 4 |
| HFOV 4 | 13,7 | 12 |
| HFOV 5 | 7,0 | 4 |
| HFOV 6 | 6,1 | 12 |
| HFOV 7 | 11,3 | 4 |
| HFOV 8 | 11,1 | 12 |

Es wird angenommen, dass Luft bei mechanischer Beatmung Raumtemperatur (ca. 20 °C) annimmt. Im Körper herrscht eine Temperatur von ca. 37 °C. Die Fluideigenschaften werden daher für 30 °C ermittelt, wobei die Dichte $\rho = 1,16 \text{ kg/m}^3$ und die kinematische Viskosität $\nu = 1,63 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ist.

2.2 Strömungsmechanische Grundbegriffe

Damit die Ventilation in den zentralen Atemwegen beschrieben und bewertet werden kann, muss ein mathematischer Zugang zur Problemstellung gefunden werden. Es werden daher Gleichungen benötigt, welche das Strömungsverhalten beschreiben und Parameter, die eine Vergleichsmöglichkeit der Strömungen bieten.

2.2.1 Grundgleichungen und Parameter

Bei der Atmung handelt es sich um eine Strömung, welche durch ein periodisches Ein- und Ausatmen oszilliert. Die wichtigsten Kennzahlen für solche Strömungen sind die Reynolds-Zahl und die Womersley-Zahl.

Die Reynolds-Zahl [27] bildet ein Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften eines strömenden Fluids über

$$Re = \frac{u_{ref} \cdot l_{ref}}{\nu}. \quad (2.5)$$

KAPITEL 2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Dabei ist u_{ref} eine Referenzgeschwindigkeit und l_{ref} eine Referenzlänge. Mit Hilfe der Reynolds-Zahl lassen sich die Ergebnisse von verschiedenen Strömungsfällen (z.B. Strömungen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten) miteinander vergleichen. Im Fall einer erzwungenen Strömung verhalten sich diese ähnlich, wenn ihre Reynolds-Zahlen gleich sind.

Die Womersley-Zahl [17] bildet ein Verhältnis zwischen der Frequenz ω der oszillierenden Strömung und den Trägheitskräften. Die Bildungsvorschrift lautet

$$Wo = \frac{l_{ref}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \quad (2.6)$$

Die Womersley-Zahl charakterisiert den periodischen Anteil einer oszillierenden Strömung sowie die Trägheit des strömenden Fluids. Mit steigender Womersley-Zahl wird der Einfluss der Trägheit immer größer. Auf den Einfluss auf das Strömungsprofil wird später noch genauer eingegangen.

Wie in Abschnitt 2.1.1 besprochen, wird als geometrische Randbedingung für das ein-dimensionale Modell das Weibelmodell benutzt. Einzelne Bronchien werden daher als gerade, starre Röhren betrachtet. In Abbildung 2.3 ist die Geometrie eines rohrförmigen Bronchus dargestellt.

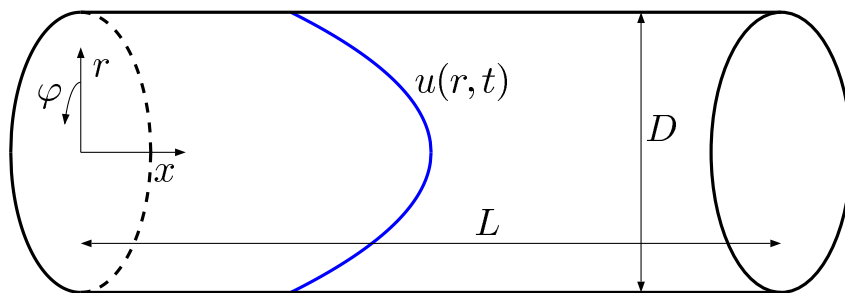


Abbildung 2.3: Skizze eines generischen Bronchus, entnommen von Feldmann *et al.* [5], mit einer vom Radius und der Zeit abhängigen Geschwindigkeit (blau dargestellt).

Da es sich um eine Rohrströmung handelt, wird zur Bildung von Womersley-Zahl und Reynolds-Zahl der Durchmesser des Bronchus herangezogen. Für die Bestimmung der

KAPITEL 2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Reynolds-Zahl wird als Referenzgeschwindigkeit der zeitlich maximale Wert der flächegemittelten Geschwindigkeit im Bronchus verwendet.

Die Mach-Zahl Ma einer Strömung ist definiert als Quotient von Strömungsgeschwindigkeit zur lokalen Schallgeschwindigkeit im strömenden Fluid. In Luft entspricht diese bei 30 °C ca. 349 m/s. Laut Tabelle 2.1 liegt die höchste Strömungsgeschwindigkeit in der Trachea bei der HFOV-Beatmung bei ca. 20 m/s. Die maximale Geschwindigkeit tritt in der Generation mit der geringsten durchströmten Querschnittsfläche auf. Laut Abbildung 2.2 ist das im Weibelmodell bei Generation drei der Fall. Die Geschwindigkeit liegt hier bei ca. 30 m/s, woraus sich $Ma = \frac{30 \text{ m/s}}{349 \text{ m/s}} \approx 0,09$ ergibt. Bei $Ma \ll 0,3$ kann die Strömung als inkompressibel angenommen werden [10, Seite 285]. In diesem Fall werden die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen [15] in der Form

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \eta \vec{\Delta} \vec{u} \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.8)$$

verwendet. Mit p wird der Druck und mit u die Geschwindigkeit bezeichnet. $\vec{\nabla}$ ist der Nabla-Operator und $\vec{\Delta}$ der Laplace Operator. ρ steht für die Dichte und ν für die dynamische Viskosität. Gleichung (2.7) beschreibt die Impulserhaltung und Gleichung (2.8) die Massenerhaltung. Da keine äußeren Kräfte wirken, muss kein zusätzlicher Kraftterm berücksichtigt werden. Der Schwerkrafteinfluss auf die Luft in der Lunge kann aufgrund der geringen Dichte und des geringen Höhenunterschiedes vernachlässigt werden.

2.2.2 Exakte Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

Im Zusammenhang mit arteriellen Blutströmungen wurde 1957 von Womersley [32] die analytische Lösung für eine oszillierende Rohrströmung vorgestellt. Die Herleitung [22] soll hier in wenigen Schritten nachvollzogen werden. Bei der Betrachtung einer instationären, ebenen Strömung sind die instationären Anteile des Geschwindigkeitsfeldes unabhängig von der x-Koordinate. Es gilt also $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Die Navier-Stokes-Gleichungen (2.7) und (2.8) in Zylinderkoordinaten reduzieren sich in diesem Fall zu

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0. \quad (2.10)$$

Die Gleichung (2.10) sagt aus, dass der Druck in einem Querschnitt konstant ist. Die Randbedingung für die Geschwindigkeit lautet $u(r = R) = 0$. In Gleichung (2.9) ist der Druck durch den Term $-\frac{\partial p}{\partial x}$ berücksichtigt. Ausgangspunkt für eine oszillierende Strömung ist eine periodische, harmonische Druckschwingung der Form

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = C \cdot \sin(\omega t) = -i \cdot C \cdot e^{i\omega t}, \quad (2.11)$$

mit der Amplitude C und der imaginären Einheit i . Setzt man diese in Gleichung (2.9) ein und schreibt die Geschwindigkeit in der Form $u(r, t) = f(r) \cdot e^{i\omega t}$, ergibt sich die Amplitudenverteilung in Form einer Differentialgleichung, deren Lösung

$$u(r, t) = -\frac{C}{\omega} e^{i\omega t} \left[1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)}{J_0 \left(\frac{D}{2} \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)} \right] \quad (2.12)$$

lautet. Dabei entsteht eine Geschwindigkeitsverteilung $u(r, t)$ aufgrund eines sinusförmigen Druckgradienten mit der Amplitude C . J_0 ist dabei die Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung. Die Abbildung 2.4 zeigt, dass für $Wo \ll 1$ ein Geschwindigkeitsprofil entsteht, welches zu jedem Zeitpunkt exakt einer Lösung unter Annahme einer voll ausgebildeten, laminaren Rohrströmung entspricht. Mit steigender Womersley-Zahl verändert sich das Geschwindigkeitsprofil, bis schließlich bei $Wo \gg 1$ ein plateauförmiges Geschwindigkeitsprofil entsteht.

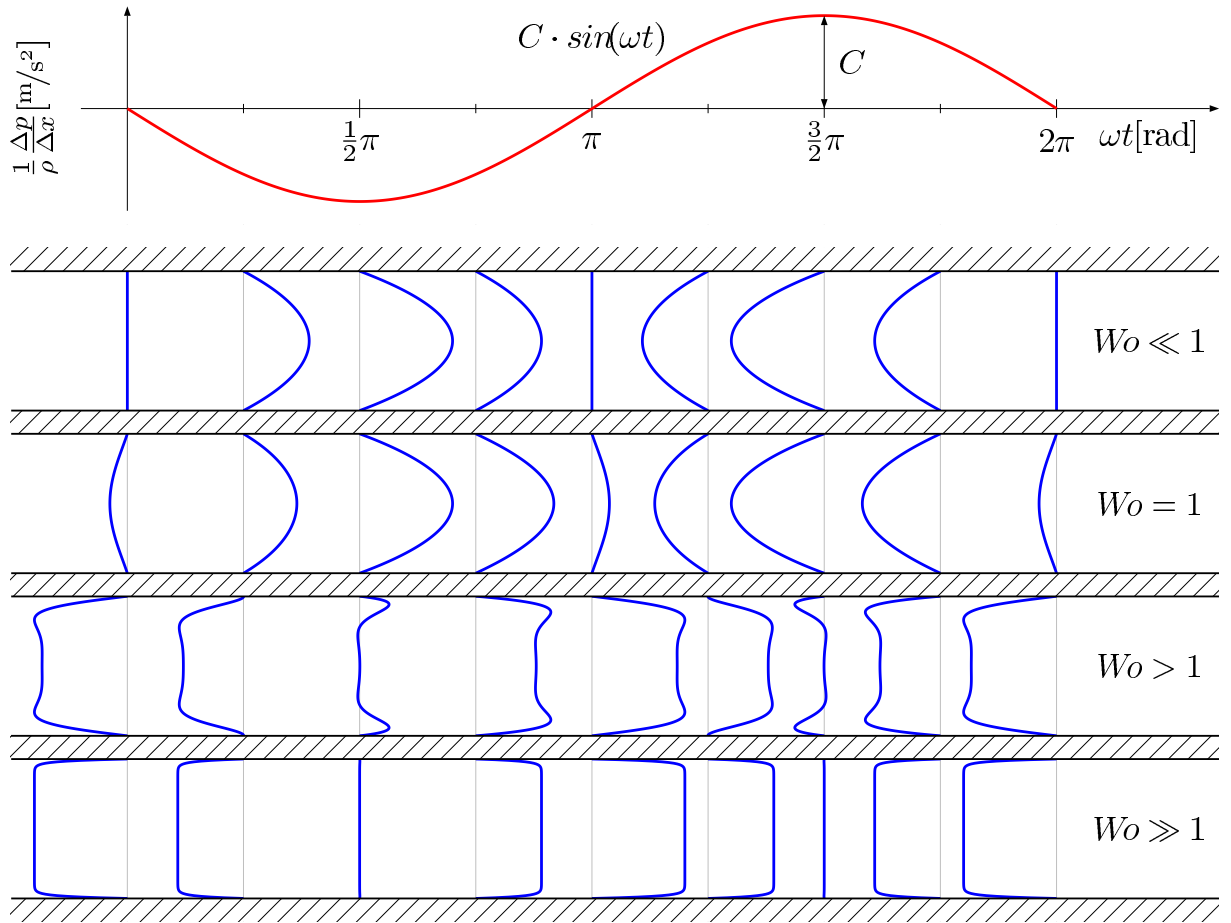


Abbildung 2.4: Dimensionslose Geschwindigkeitsprofile in einem generischen Bronchus (blau), bezogen auf einen oszillierenden Druckgradienten (rot), ermittelt nach Gleichung (2.12) bei verschiedenen Womersley-Zahlen nach Feldmann *et al.* [5].

Die in Abbildung 2.4 dargestellten Geschwindigkeitsverläufe sind auf die maximale Geschwindigkeitsamplitude normiert. Wenn sich nun die Womersley-Zahl erhöht, sinkt die Amplitude der Geschwindigkeit. Um eine definierte Reynolds-Zahl zu erreichen, muss eine Druckschwingung mit definierter Amplitude vorgegeben werden. Im Fall einer steigenden Womersley-Zahl, ist für den Druckgradienten eine höhere Amplitude nötig, um die gleiche Reynolds-Zahl zu erreichen. Letzteres ist bei Feldmann *et al.* [5] im Detail diskutiert.

Für den Fall einer voll ausgebildeten, laminaren Strömung lässt sich ebenfalls eine analytische Lösung ableiten [22]. In der Ausgangsgleichung (2.7) wird hierfür der zeitliche Einfluss vernachlässigt, es gilt also $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Es existieren keine Geschwindigkeiten in radialer Richtung und Umfangsrichtung, sondern nur eine Geschwindigkeit $u(r, t)$ in Richtung

KAPITEL 2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

der Rohrachse (vgl. Abbildung 2.3). Der Druck variiert in x-Richtung, ist aber in jedem Querschnitt konstant. In Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$\eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Als Randbedingungen gelten $u(r = R) = 0$. Die Lösung der Gleichung ergibt ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil der Form

$$u(r) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (2.14)$$

und

$$u_{max} = 2u_m = \frac{R^2}{4\eta} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (2.15)$$

welches denen in Abbildung 2.4 für $Wo \ll 1$ gleicht. Das Druckgefälle hängt dann nur noch von der mittleren Geschwindigkeit $u_m = \frac{\dot{V}}{\pi R^2}$ ab und wird mit

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\lambda}{d} \frac{\rho}{2} u_m^2 \quad (2.16)$$

bestimmt. Dabei ist λ die Rohrreibungszahl, welche sich mit Gleichung (2.15) zu

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (2.17)$$

berechnen lässt. Die Gleichung (2.17) gilt jedoch nur unter den getroffenen Annahmen einer voll entwickelten, laminaren Strömung. Für eine Strömung in einem kreisförmigen Rohrsegment, bei der der Gradient $\frac{\partial p}{\partial x}$ durch die Druckänderung über die Rohrlänge $\frac{\Delta p}{l}$ ersetzt wird, ergibt sich mit Gleichung (2.5) für den Druckverlust die Formel

$$\Delta p = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot R^4} \cdot \dot{V}. \quad (2.18)$$

KAPITEL 2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

Die Strömung unter den zuvor getroffenen Annahmen ist als Hagen-Poiseuille-Strömung bekannt.

Wenn in Gleichung (2.7) neben der Annahme einer stationären Strömung auch die Reibung vernachlässigt wird, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{2} u^2 + p \right) = 0. \quad (2.19)$$

Physikalisch bedeutet das, dass $\frac{\rho}{2} u^2 + p$ entlang einer Stromlinie konstant ist. Bei der Betrachtung einer Rohrströmung wird nun angenommen, dass die gesamte Strömung im Rohr mit nur einer Stromlinie beschrieben werden kann. Damit kann die Integration über die Rohrlänge ausgeführt werden. Man erhält die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\rho}{2} u^2 + p = \text{const.} \quad (2.20)$$

Gleichung (2.20) beschreibt die Energieerhaltung für inkompressible und instationäre Strömungen. In obiger Form ist diese als Druckgleichung angeführt, was bedeutet, dass alle Terme die Einheit des Druckes tragen. Um eine laminare Rohrströmung mit Reibung zu beschreiben, kann die Hagen-Poiseuille-Strömung verwendet werden. Die Bernoulli-Gleichung, welche zusätzlich eine reibungsfreie Strömung voraussetzt, kann mit einem Zusatzterm für die Berechnung von reibungsbehafteten Strömung erweitert werden. Bei einer voll ausgebildeten, laminaren Strömung entspricht der Druckverlust durch Wandreibung Gleichung (2.18). Auch Strömungsänderungen z.B. bei Einbauten im Rohr oder an Verzweigungen, welche einen Druckverlust verursachen, können über einen Zusatzterm [6] erfasst werden. Der Term hat allgemein die Form

$$p_m = \frac{\zeta \cdot \rho \cdot u^2}{2}, \quad (2.21)$$

wobei ζ einen Verlustbeiwert darstellt, welcher an die spezifischen geometrischen Verhältnisse angepasst werden muss. Mit den Gleichungen (2.18), (2.20) und (2.21) lässt sich eine inkompressible, instationäre Rohrströmung beschreiben, die zusätzlichen Widerständen

KAPITEL 2. THEORETISCHE GRUNDLAGEN

ausgesetzt ist. Der Vorteil gegenüber der analytischen Lösung einer oszillierenden Rohrströmung besteht in der Einfachheit der Gleichung. Sie ist jedoch nicht geeignet, um instationäre Effekte zu erfassen. Da in der Bernoulli-Gleichung, welche eine reibungsfreie Strömung voraussetzt, über Zusatzterme auch Reibung erfasst werden kann, wird nun versucht, auch instationäre Effekte über einen Zusatzterm zu berücksichtigen. Eine Möglichkeit besteht in der Erfassung der Trägheit des strömenden Mediums. Ein Zusatzterm [33] könnte in der Form

$$\Delta p = L \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} \quad (2.22)$$

berücksichtigt werden, wobei L die Trägheit ist, welche in Abschnitt 3.1.1 noch genauer untersucht wird. Δp bildet den Druckverlust in Abhängigkeit der Trägheit und der zeitlichen Änderung des Volumenstroms. Die Bilanzierung der Energie am Ein- und Ausgang eines Rohres lautet dann

$$\frac{\rho}{2} u^2 + p_E = \frac{\rho}{2} u^2 + p_A + \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot R^4} \cdot \dot{V} + \frac{\zeta \cdot \rho \cdot u^2}{2} + L \frac{\partial \dot{V}}{\partial t}. \quad (2.23)$$

p_E ist hier der Druck am Eingang des Rohres und p_A der am Ausgang. Zur Vereinfachung wird die Geschwindigkeit als u bezeichnet, womit jedoch im Folgenden stets die flächengemittelte Geschwindigkeit im Rohr gemeint ist. Der Zusammenhang zwischen Volumenstrom und Geschwindigkeit ist über die Kontinuitätsgleichung $\dot{V} = A \cdot u$ gegeben, wobei A die Querschnittsfläche des Rohres ist. Das bedeutet, dass sich die Strömungsgeschwindigkeit u über die Länge eines geraden Rohres nicht ändert. Darüber hinaus kann die Geschwindigkeit über den Volumenstrom ausgedrückt werden und umgekehrt. Die vollständige Beschreibung der Druckverluste bei der Durchströmung eines einzelnen Rohrsegmentes ist also durch die Differentialgleichung

$$p_E - p_A = \Delta p = \frac{\zeta \cdot \rho}{2 \cdot A} \cdot \dot{V}^2 + \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot R^4} \cdot \dot{V} + L \cdot \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} \quad (2.24)$$

gegeben. Der erste Term auf der rechten Seite erfasst dabei Druckverluste durch Änderungen der Strömung, der zweite die Reibungsverluste und der dritte den Einfluss der Trägheit des oszillierenden Fluids. Der Trägheitsterm darf nicht mit der instationären Bernoulli-

Gleichung verwechselt werden, denn für diese gilt die Annahme einer stationären Strömung nicht.

Die Tatsache, dass mit der Bernoulli-Gleichung verschiedenartige Verluste aufsummiert werden können, führt dazu, dass eine Vielzahl von Effekten erfasst werden kann, ohne dass die Gleichung ihre einfache Struktur verliert.

2.2.3 Parameterraum der Beatmungsfälle

Eine Grundannahme bei der Entwicklung des Modells ist das Vorliegen einer voll ausgebildeten, laminaren Strömung. Es gilt also Gleichung (2.17). Eine nicht oszillierende Strömung gilt als laminar, wenn $Re < 2300$ [27] ist. Die Richtigkeit der getroffenen Annahme hängt somit von der Eingangsgeschwindigkeit ab. In fortlaufenden Generationen wird aufgrund des sich aufteilenden Volumenstroms die Geschwindigkeit immer geringer. Da jedoch eine oszillierende Strömung betrachtet wird, muss noch untersucht werden, ob die Oszillation einen Einfluss auf das Turbulenzverhalten hat. Die Abbildung 2.5 zeigt die Reynolds-Zahl über der Womersley-Zahl, welche sich ergibt, wenn die Beatmungsfälle aus Tabelle 2.1 auf die geometrischen Randbedingungen des Weibelmodells angewendet werden. Neben der Darstellung der verschiedenen Beatmungsfälle enthält das Diagramm auch eine Stabilitätsgrenze der Strömung. Die Markierungen auf den Kurven entsprechen den Generationen des Weibelmodells, wobei der am weitesten rechts gelegene Punkt die Generation null darstellt, die zweite Markierung von rechts entspricht Generation eins usw.

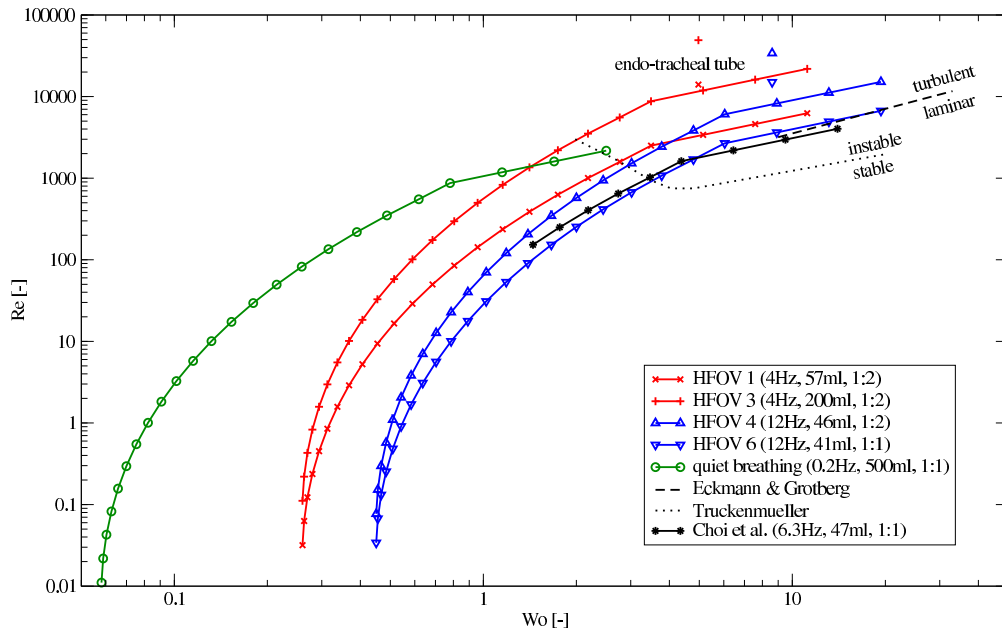


Abbildung 2.5: Parameterbereich verschiedener Beatmungsfälle in den einzelnen Generationen eines Bronchialbaumes (Symbole) und einer Stabilitätsgrenze, entnommen von Feldmann *et al.* [5].

Laut Abbildung 2.5 treten in der Trachea Reynolds-Zahlen im Bereich von ca. $2000 < Re < 22000$ und Womersley-Zahlen im Bereich von ca. $2,5 < Wo < 20$ auf. In den oberen Generationen kann die Strömung daher nicht mehr als laminar angenommen werden. Nur unterhalb der Stabilitätsgrenze liegt eine laminare Strömung vor.

Für die Verwendung als Randbedingung wird angenommen, dass die Berechnung in Generation sieben beginnt. Hier liegt der Parameterraum bei ca. $130 < Re < 1400$ und $0,3 < Wo < 2,5$. Alle Werte liegen somit deutlich unterhalb der Stabilitätsgrenze. Damit kann die Strömung dort als laminar angenommen werden.

3 Aufbau des Modells

Die geometrischen Randbedingungen für das eindimensionale Modell der Lungenventilation sind durch das Weibelmodell bereits definiert. Die im Abschnitt 2.2 dargestellte Gleichung (2.24) wird im Folgenden zusammen mit diesen geometrischen Randbedingungen angewendet, woraus ein eindimensionales Modell zur Berechnung der Ventilation in der menschlichen Lunge entsteht.

3.1 Bestimmung der Verlustkoeffizienten

Die Energieerhaltungsgleichung (2.24) enthält Unbekannte, mit denen die Energieverluste im Bronchialbaum modelliert werden. Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 angesprochen, werden die Energieverlustterme in der Bernoulli-Gleichung als Druckverluste beschrieben. Diese entstehen durch Reibung an den Wänden und an den Verzweigungen der Bronchien sowie durch die Trägheit des oszillierenden Fluids. Um die Druckverluste zu erfassen, werden nun die in Gleichung (2.24) enthaltenen Unbekannten bestimmt.

3.1.1 Verluste durch Reibung und Trägheit

Die Atmung ist ein konvektiver Transport von Luft durch den Bronchialbaum. Es tritt ein Druckverlust infolge von Wandreibung auf. Da es sich bei dem konvektiven Transport um einen oszillierenden Vorgang handelt, muss auch die Trägheit des Fluids berücksichtigt werden. Die Verluste durch Reibung und Trägheit können an der Energieerhaltung eines Volumenelements hergeleitet werden. An dem in Abbildung 3.1 dargestellten Volumenelement wirken die Druckkräfte $F_0 = p_0 \cdot A_0$ und $F_1 = p_1 \cdot A_1$. Da das Element bewegt wird, wirken Reibungskräfte (F_R). Erfolgt zusätzlich eine Beschleunigung, treten auch Trägheitskräfte (F_T) auf.

KAPITEL 3. AUFBAU DES MODELLS

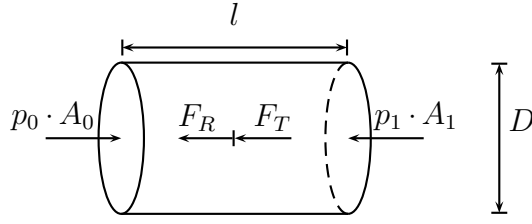


Abbildung 3.1: Kräftebilanz am Volumenelement der Länge l und des Durchmessers D für die Fluidsäule einer oszillierenden Strömung.

Die Kräftebilanz ergibt sich zu

$$F_0 = F_1 + F_T + F_R. \quad (3.1)$$

Die Trägheitskraft wird als d'Alembertsche Trägheitskraft angenommen, welche der Beschleunigung einer Masse entgegen wirkt. Die Trägheitskraft wird als

$$F_T = m \cdot a = m \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.2)$$

beschrieben. Wenn die Gleichung (3.1) in die Dimension des Druckes gebracht wird, ergibt sich

$$p_0 = p_1 \cdot \frac{A_1}{A_0} + \frac{m}{A_0} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{F_R}{A_0}, \quad (3.3)$$

wobei der dritte Term den Druckverlust infolge der Wandreibung darstellt, welcher mithilfe von Gleichung (2.18) ausgedrückt werden kann und als Δp_{fric} bezeichnet wird. Da der Bronchus als gerades Rohr angenähert wird, bleibt die Querschnittsfläche unverändert und $\frac{A_1}{A_0} = 1$. Der zweite Term beschreibt den Einfluss der Trägheitskräfte. In Abschnitt 2.2.2 wurde bei der Abbildung 2.4 bereits erwähnt, dass bei einem Anstieg der Womersley-Zahl ein höherer Druckgradient nötig ist, um einen gleichbleibenden Volumenstrom zu erhalten. Das führt bei der Vorgabe eines Volumenstroms zu einem Druckanstieg, der durch die Bewegung des Fluids auftritt. Dieser wird mittels des zweiten Terms berücksichtigt. Bei Erweiterung dieses Term mit $\frac{l}{l}$, ergibt sich $\frac{m \cdot l}{A_0 \cdot l} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$, wobei $\frac{m}{A_0 \cdot l} = \frac{m}{V} = \rho$ gilt. Der Einfluss der Trägheit lautet also

$$\Delta p_{ine} = \rho \cdot l \cdot \frac{\partial u}{\partial t},$$

bzw. in Abhängigkeit vom Volumenstrom

$$\Delta p_{ine} = \frac{\rho \cdot l}{A} \cdot \frac{\partial \dot{V}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Die in Abschnitt 2.2.2 eingeführte Trägheit in Gleichung (2.22) ergibt sich hiermit in unserem Fall zu $L = \frac{\rho \cdot l}{A}$. Die Erfassung der Trägheit über diesem Term findet sich auch bei Zielke [33].

3.1.2 Verlust durch Verzweigungen

An den Verzweigungspunkten des Bronchialbaumes treten Verluste durch Strömungsablösung und die Erzeugung von mehrdimensionalen Strömungsstrukturen auf, welche mit der eindimensionalen Bernoulli-Gleichung nicht erfasst werden. Da diese Verluste trotzdem berücksichtigt werden, werden wie in der Literatur üblich, empirisch ermittelte Verlustkoeffizienten in die Bernoulli-Gleichung eingebracht. Der Verlustwert wird in Gleichung (2.24) als ζ bezeichnet. Bei der Bestimmung der ζ -Werte wird eine Fallunterscheidung vorgenommen. Bei der Inspiration strömt die Luft, wie in Abbildung 3.2(a) skizziert, in die Lunge. Beim Übergang in die tiefere Generation liegt also eine Trennung der Strömung vor, da sich die Luft in zwei Bronchien aufteilt. Folglich handelt es sich bei der Expiration um eine Vereinigung, wie in Abbildung 3.2(b) angedeutet, da die Luft aus zwei tieferen Bronchien zusammengeführt wird.

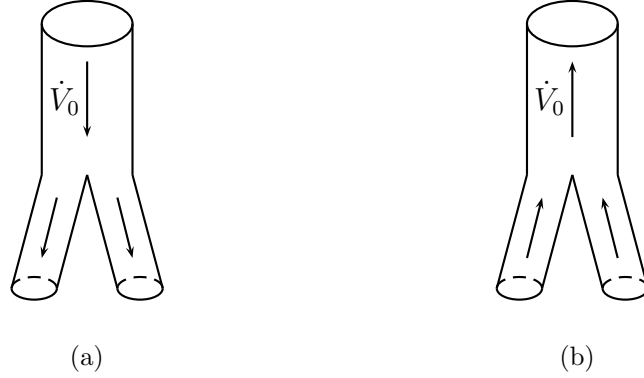


Abbildung 3.2: Fallunterscheidung für die Strömung an einer Verzweigung von Bronchien: (a) Stromtrennung bei der Inspiration (b) Stromvereinigung bei der Expiration.

Die Verlustbeiwerte für eine Stromtrennung werden über die Gleichung

$$\zeta_{0j} = 1 - 2 \cdot \frac{A_1}{2 \cdot A_0} \cdot \cos(\vartheta) + \left(\frac{A_1}{2 \cdot A_0} \right)^2 \quad (3.5)$$

ermittelt, was dem Verlustbeiwert nach Truckenbrodt [27] für eine symmetrische Aufteilung des eingehenden Volumenstroms entspricht, wobei ϑ den Verzweigungswinkel anzeigt. Bei einer Stromvereinigung gilt dagegen die Gleichung

$$\zeta_{j0} = 1 - 4 \frac{A_1}{A_0} \cdot \left(\frac{A_1}{2 \cdot A_0} \right)^2 \cdot \cos(\vartheta) + \left(\frac{A_1}{2 \cdot A_0} \right)^2, \quad (3.6)$$

die ebenfalls auf der Annahme einer symmetrischen Verteilung der Volumenströme nach Truckenbrodt [27] basiert.

Da im Weibelmodell symmetrische Verzweigungen angenommen werden, ist der Verzweigungswinkel in allen Verzweigungen einer Generation und in allen Generationen gleich. Mit dem bei Horsefield *et al.* [11] angegebenen Winkel von 70° , ergibt sich $\vartheta = 35^\circ$.

3.2 Umsetzung des Modells

Mithilfe des Weibelmodells wird der Bronchialbaum als ein symmetrisches System aus geraden Röhren und deren Verzweigungen dargestellt. Die Gleichung (2.20) gilt entlang

KAPITEL 3. AUFBAU DES MODELLS

einer Stromlinie. Mit der Annahme, dass die Rohrströmung mit nur einer Stromlinie beschrieben werden kann, wird die Gleichung (2.24) auf ein Rohr angewendet. Bei der Betrachtung einer Verzweigung, muss diese aus Einzelbronchien zusammengesetzt werden.

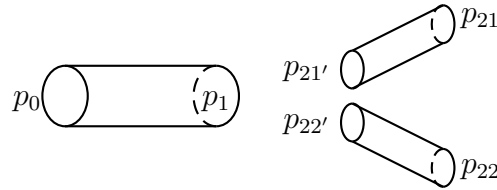


Abbildung 3.3: Diskrete Druckwerte bei einzelnen Bronchien.

Durch Anwenden der Gleichung (2.20) bzw. Gleichung (2.24) auf die einzelnen Bronchien aus Abbildung 3.3 ergibt sich eine Energiebilanz zwischen den Punkten 0 / 1 sowie zwischen 21' / 21 und 22' / 22. In den einzelnen Bronchien fallen Druckverluste durch Reibung und durch die Trägheit der Atemluft an. Wenn diese Einzelbronchien zu einer Verzweigung zusammengesetzt werden, wird zusätzlich der Druckverlust an der Verzweigung berücksichtigt. Dieser wird durch den ersten Term in Gleichung (2.24) erfasst. Wie in Abschnitt 3.1.2 definiert wurde, ist der Verlustbeiwert für die Strömung vom Volumenstrom \dot{V}_0 abhängig. An der Verzweigungsstelle muss Druckausgleich herrschen, weshalb die Druckwerte an der Verzweigungsstelle gleichgesetzt werden. Es gilt also $p_1 = p_{21}'$ und $p_1 = p_{22}'$. Die diskreten Punkte für Druck und Volumenstrom bei den zusammengesetzten Bronchien sind in Abbildung 3.4 dargestellt.

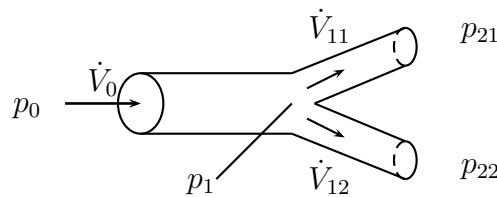


Abbildung 3.4: Reihenschaltung einzelner Bronchien zu einer einfachen Verzweigung mit diskreten Werten für den Volumenstrom und den Druck.

Wird die Gleichung (2.8) auf gerade Bronchien angewendet, ergibt sich $\dot{V} = u \cdot A = \text{const.}$ Da die Strömung an einer Verzweigung ebenfalls die Massenerhaltung erfüllt, ist der Zusammenhang der einzelnen Volumenströme über

$$\dot{V}_0 = \dot{V}_{11} + \dot{V}_{12} \quad (3.7)$$

gegeben. Als Randbedingungen wird der Volumenstrom \dot{V}_0 , sowie die Druckwerte p_{21} und p_{22} vorgegeben. Die Seite des Modells, an welcher der Volumenstrom vorgegeben ist, wird als Einlass bezeichnet, auch wenn an dieser Seite bei einer oszillierenden Strömung die Strömung zeitweise austritt. Die Seite mit den vorgeschriebenen Druckwerten wird als Auslass bezeichnet, wobei an letzterer die oszillierende Strömung ebenfalls einströmen kann. An dieser Notation wird für den weiteren Verlauf der Arbeit festgehalten.

Mit diesen Vorgaben wird der Druck p_1 an der Verzweigung und der Druck p_0 am Einlass berechnet. Die Druckwerte, welche am Auslass vorgegeben werden, werden als Druckrandbedingung bezeichnet. Sind diese Werte an den einzelnen Auslässen identisch, wird das als Symmetrie der Randbedingungen bezeichnet. Unterscheiden sich die Werte, wird von einer asymmetrischen Randbedingung gesprochen.

3.2.1 Aufstellen des Gleichungssystems

Bei der Anwendung von Gleichung (2.24) auf ein Netzwerk von Verzweigungen, entsteht ein System von Differentialgleichungen. Das Gleichungssystem wird im Folgenden beispielhaft an der in Abbildung 3.5 dargestellten, schematischen Darstellung des Bronchialbaumes aufgestellt.

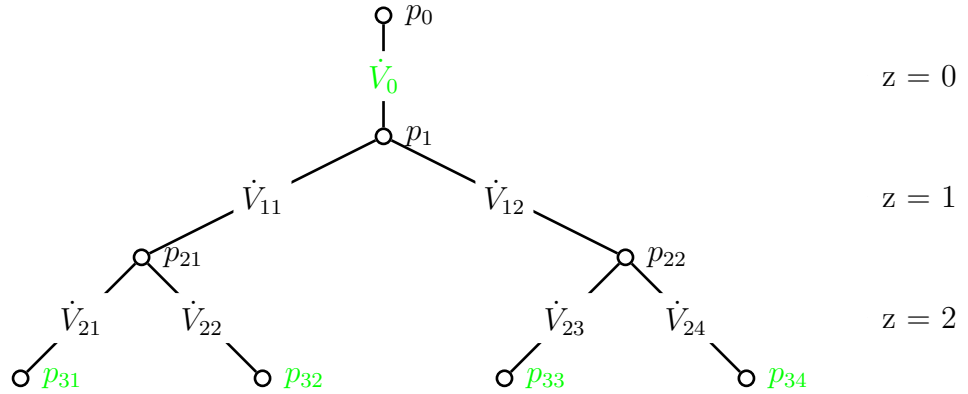


Abbildung 3.5: Schematische Darstellung des Bronchialbaumes über drei Generationen in nicht maßstabsgetreuer Darstellung nach Weibel [31], mit den in Abschnitt 3.2 eingeführten Bezeichnungen.

Die Abbildung 3.5 zeigt drei Generationen des Bronchialbaumes mit Druckwerten und Volumenströmen. Die grün markierten Werte werden als Randbedingung vorgegeben. Zur Abschätzung des Druckverlustes in Bronchialbäumen können am Einlass Werte für den Volumenstrom festgelegt werden. Da das Modell auch als Randbedingung für Simulationen im Rahmen der Computational Fluid Dynamics (CFD) genutzt werden soll, können als Volumenstrom auch die Simulationsergebnisse vorgegeben werden. Die Werte für den Druck am Auslass werden zunächst als konkreter Zahlenwert spezifiziert. Bei der Anwendung von Gleichung (2.24) auf jeden Bronchus dieses Systems, entsteht ein Gleichungssystem, welches symbolisch als

$$f(\vec{x}) = \vec{b} \quad (3.8)$$

geschrieben wird. Die einzelnen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
p_0 - p_1 &= Bif_0 \cdot \dot{V}_0^2 + Fric_0 \cdot \dot{V}_0 + Ine_0 \cdot \frac{\partial \dot{V}_0}{\partial t} \\
p_1 - p_{21} - Bif_1 \cdot \dot{V}_{11}^2 - Fric_1 \cdot \dot{V}_{11} - Ine_1 \cdot \frac{\partial \dot{V}_{11}}{\partial t} &= 0 \\
p_1 - p_{22} - Bif_1 \cdot \dot{V}_{12}^2 - Fric_1 \cdot \dot{V}_{12} - Ine_1 \cdot \frac{\partial \dot{V}_{12}}{\partial t} &= 0 \\
p_{21} - Fric_2 \cdot \dot{V}_{21} - Ine_2 \cdot \frac{\partial \dot{V}_{21}}{\partial t} &= p_{31} \\
p_{21} - Fric_2 \cdot \dot{V}_{22} - Ine_2 \cdot \frac{\partial \dot{V}_{22}}{\partial t} &= p_{32} \\
p_{22} - Fric_2 \cdot \dot{V}_{23} - Ine_2 \cdot \frac{\partial \dot{V}_{23}}{\partial t} &= p_{33} \\
p_{22} - Fric_2 \cdot \dot{V}_{24} - Ine_2 \cdot \frac{\partial \dot{V}_{24}}{\partial t} &= p_{34}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Mit $Fric_z$ werden die Druckverluste durch Reibung (friction losses) und mit Ine_z die Druckverluste durch die Trägheit des oszillierenden Fluids (inertia losses) bezeichnet. Siw wurden in Abschnitt 3.1.1 hergeleitet. Der Druckverlust an den Verzweigungsstellen (bifurcation losses) wird mit Bif_z beschrieben, welcher in Abschnitt 3.1.2 erläutert wurde. Die Werte für die Verluste ergeben sich, in Abhängigkeit der betrachteten Generation z zu

$$\begin{aligned}
Bif_z &= \frac{\zeta_z \cdot \rho}{2 \cdot A_z} \\
Fric_z &= \frac{8 \cdot \eta \cdot l_z}{\pi \cdot R_z^4} \\
Ine_z &= \frac{\rho \cdot l_z}{A_z}.
\end{aligned}$$

In Abschnitt 3.1.2 wurden die Verluste an den Verzweigungsstellen so hergeleitet, dass diese in Abhängigkeit des oberen Bronchus berücksichtigt werden. Der Verlust durch die Verzweigung zwischen Generation null und eins wird daher, in Abhängigkeit von \dot{V}_0 , in Generation null berücksichtigt. Das Gleiche gilt für die Verzweigungen zwischen Generation eins und zwei, welche in Generation eins berücksichtigt werden. In Generation zwei fallen daher keine Verzweigungsverluste an, da diese bereits in den oberen Generationen

berücksichtigt wurden.

Die Massenerhaltung an den Verzweigungen ergibt mit Gleichung (3.7)

$$\begin{aligned}\dot{V}_{11} + \dot{V}_{12} &= \dot{V}_0 \\ \dot{V}_{11} - \dot{V}_{21} - \dot{V}_{22} &= 0 \\ \dot{V}_{12} - \dot{V}_{23} - \dot{V}_{24} &= 0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Der Vektor der Unbekannten für dieses System wird als

$$\vec{x}^T = [p_0, p_1, p_{21}, \dot{V}_{11}, p_{22}, \dot{V}_{12}, \dot{V}_{21}, \dot{V}_{22}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{24}]\tag{3.11}$$

definiert. Die aufgestellten Gleichungssysteme (3.9) und (3.10) bestehen aus zehn Differentialgleichungen, die die Druckverhältnisse im Bronchialbaum aus Abbildung 3.5 beschreiben. Durch Vorgabe von Randbedingungen für den Volumenstrom am Einlass und den Druckwerten am Auslass, die Vektor \vec{b} enthält, kann das Gleichungssystem numerisch gelöst werden. Das Ergebnis liefert die Verteilung von Druck und Volumenstrom im Bronchialbaum an den diskreten Punkten aus Abbildung 3.5.

Die Berechnung eines Atemzyklus, bei dem als Randbedingung ein veränderlicher Volumenstrom ($\dot{V}_0 = \dot{V}_0(t)$) am Einlass vorliegt, ist mittels Gleichung (2.24) nicht möglich, da die Gleichung (2.20) nur für stationäre Strömungen gilt.

Wenn ein zeitabhängiger Volumenstrom vorgegeben werden soll, wird dieser zeitlich diskretisiert. An jedem diskreten Zeitpunkt liegt dann ein konkreter Wert für den Volumenstrom vor. Am Auslass werden Druckwerte festgelegt, welche während des gesamten Atemzyklus konstant sind. Mit diesen Werten wird eine stationäre Lösung berechnet.

Auf die Betrachtung von veränderlichen Druckrandbedingungen wird in Abschnitt 3.2.2 genauer eingegangen.

3.2.2 Ausflussrandbedingung

Wie in Abschnitt 2.1 bereits erwähnt ist, zeigt die Lunge ein elastisches Verhalten. In dem vorgestellten eindimensionalen Modell werden die Bronchien jedoch als starre Röhren betrachtet. Somit kann das elastische Verhalten eines Bronchialbaumes nicht nachgebildet

KAPITEL 3. AUFBAU DES MODELLS

werden. Da in den Atemwegen eine funktionelle Trennung zwischen konvektivem und diffusivem Transport vorliegt (vgl. Abschnitt 2.1.2), werden die unteren Generationen eines Bronchialbaumes nicht berechnet. Die Trennung wird in Abschnitt 5.4 genauer untersucht. Nicht berücksichtigte Generationen und der Alveolarbereich zeigen ein elastisches Verhalten, welches als Randbedingung in das Bernoulli-Modell eingebracht wird. Hierfür wird, wie bei Soodt *et al.* [25], am Auslass der letzten berechneten Generation des Bronchialbaumes ein Ballon angehängt, wie in Abbildung 3.6 dargestellt ist.

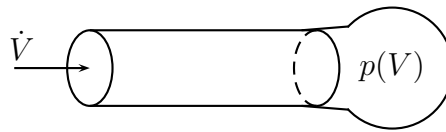


Abbildung 3.6: Schematische Darstellung eines Ballons am Ende eines Bronchus mit dem volumenabhängigen Druck $p(V)$.

Das Volumen im Ballon hängt von dem Volumenstrom im Bronchus während des Atemzyklus ab. Für den Bronchus in Abbildung 3.6 ergibt sich das Volumen zu

$$V(T) = \int_0^T \dot{V}(t) \cdot dt. \quad (3.12)$$

An jeden Auslass wird ein Ballon gesetzt, der eine Compliance aufweist. Mithilfe dieses Ballons kann an jedem Auslass ein volumenabhängiger Druck der Form

$$p(V) = \frac{1}{C_{comp}} \cdot V \quad (3.13)$$

vorgegeben werden. Mit der Compliance wird das Materialverhalten des Ballons charakterisiert.

KAPITEL 3. AUFBAU DES MODELLS

Da in der Literatur für den Alveolarbereich keine Compliance-Werte zu finden sind, wird zunächst das elastische Verhalten von Lunge und Thorax betrachtet. Diese weisen eine Druck-Volumen-Beziehung auf, welche in Abbildung 3.7 dargestellt ist. In der Medizin ist es üblich, die Dehnungskurve von Lunge und Thorax während der Atmung zu messen. Die treibende Druckdifferenz zwischen Alveolarbereich und Umwelt, welche in Abschnitt 2.1.2 bereits angesprochen wurde, ist während der In- und Expiration entgegengesetzt. Durch die verschiedenen Strömungswiderstände beim Ein- und Ausatmen zeigt sich ein Hystereseverhalten. Misst man die Dehnungskurve nach der Expiration bei entspannter Atemmuskulatur, ergibt sich die Ruhedehnungskurve. Genauere Informationen zur Druck-Volumen-Beziehung von Lunge und Thorax finden sich bei Silbernagl *et al.* [24].

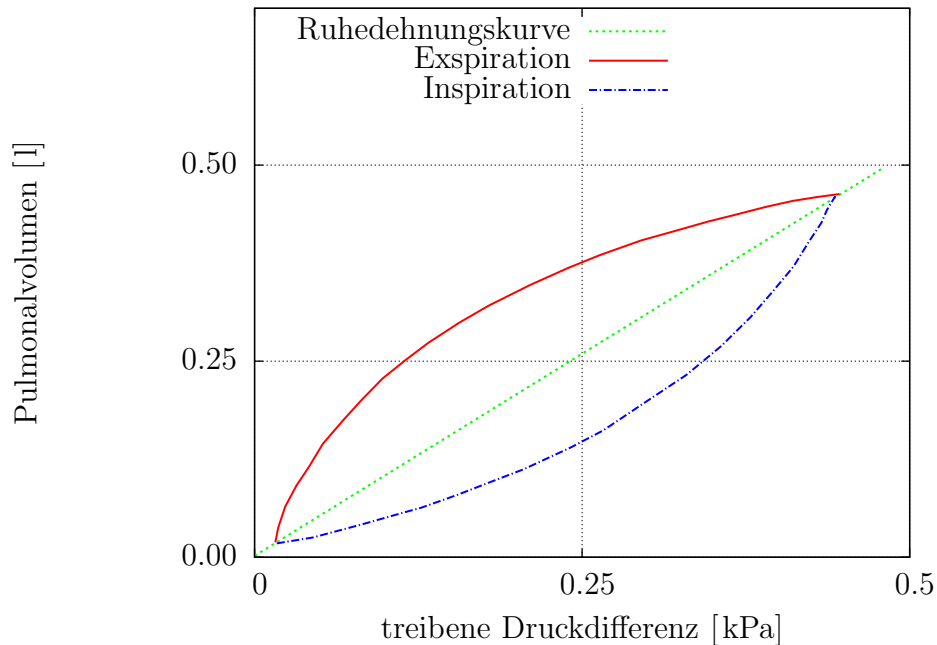


Abbildung 3.7: Dynamische Druck-Volumen-Beziehung bei der Inspiration (blau), der Expiration (rot) und der Ruhedehnungskurve (grün), entommen von Silbernagl *et al.* [24].

Um dem Ballon ein Materialverhalten zuzuordnen, wird nun die Ruhedehnungskurve verwendet. So kann an jedem Auslass ein Ballon mit einer anderen Compliance angehängt werden. Für das System in Abbildung 3.5 würden dann die Druckvorgaben

$$\begin{aligned}
 p_{31} &= \frac{1}{Comp_1} \cdot V_{21} \\
 p_{32} &= \frac{1}{Comp_2} \cdot V_{22} \\
 p_{33} &= \frac{1}{Comp_3} \cdot V_{23} \\
 p_{34} &= \frac{1}{Comp_4} \cdot V_{24}
 \end{aligned}$$

gelten. Damit ist es möglich, in jedem berechneten Zeitschritt eine andere Druckrandbedingung festzulegen und die Einflüsse des elastischen Verhaltens der nicht vom Modell aufgelösten Bereiche als Randbedingung zu berücksichtigen. Da die Ruhedehnungskurve für die gesamte Lunge und den Thorax betrachtet wird, wird der vorgegebene Compliance-Wert auf die Generation des Auslasses skaliert.

Die Vorgabe eines volumenspezifischen Druckes kann später noch erweitert werden, indem den Ballons ein nicht-lineares Materialverhalten vorgegeben und die Hysterese berücksichtigt wird. Ein Ansatz für ein lungenähnliches Materialverhalten ist z.B. ein Mooney-Rivlin-Modell, was unter anderem von Soodt *et al.* [25] verwendet wird.

3.3 Lösen des Gleichungssystems

In diesem Abschnitt werden die Schritte zur Lösung des in Abschnitt 3.2.1 aufgestellten Gleichungssystem (3.8) erarbeitet. Da in den Gleichungen die Ableitungen der Volumenströme auftreten, liegen hier Differentialgleichungen vor. In Abschnitt 3.2.1 wird die zeitliche Diskretisierung des Volumenstroms beschrieben, um ganze Atemzyklen zu berechnen. In einem beliebigen Zeitschritt sind daher die Volumenströme vergangener Zeitschritte bekannt. Nähert man sich der Ableitung mittels Rückwärtsdifferenzen, ergibt sich

$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} = \frac{\dot{V}^{tk} - \dot{V}^{tk-1}}{\Delta t}, \tag{3.14}$$

wobei mit tk der jeweilige Zeitschritt und mit Δt die Zeitschrittweite bezeichnet ist. Somit ist das System von Differentialgleichungen auf ein System von diskreten quadratischen Gleichungen reduziert, das auf unterschiedliche Weise gelöst werden kann. Des Weiteren

KAPITEL 3. AUFBAU DES MODELLS

können durch die diskrete Berechnung der Ableitung, beliebige zeitliche Verläufe der Volumenströme betrachtet werden.

Eine einfache Variante zur Lösung des Gleichungssystems bildet das Newton-Raphson-Verfahren. Ein Vorteil dieses Verfahrens ist die quadratische Konvergenzordnung. Diese führt nach wenigen Iterationen zur Lösung, jedoch nur wenn die Startwerte hinreichend nah bei der Lösung liegen [21]. In diesem Abschnitt wird eine Strategie zur Ermittlung geeigneter Startwerte vorgestellt, sodass auf das Newton-Raphson-Verfahren zurückgegriffen werden kann.

Für die iterative Lösung des Gleichungssystems wird die Gleichung (3.8) zunächst in die Form

$$f(\vec{x}) - \vec{b} = \vec{0} \quad (3.15)$$

gebracht. Für die iterative Lösung wird ein Startwert \vec{x}_0 benötigt, mit welchem ein Residuum \vec{r} über

$$\vec{r} = f(\vec{x}_0) - \vec{b} \quad (3.16)$$

bestimmt werden kann. Wichtig für die Lösung des Gleichungssystems sind die bereits angesprochenen Startwerte. Um eine Konvergenz der Lösung zu erzielen, wird die symmetrische Verteilung der Druck- und Volumenstromwerte als Startwert vorgegeben. Bei symmetrischen Randbedingungen gilt dabei

$$p_{31} = p_{32} = p_{33} = p_{34},$$

und somit auch

$$p_{21} = p_{22}.$$

Das heißt, dass in jeder Generation die Druckwerte identisch sind. Mit dem Weibelmodell entsteht somit eine vollständig symmetrische Strömung, bei der sich die Volumenströme

KAPITEL 3. AUFBAU DES MODELLS

an jeder Verzweigung halbieren. Die Volumenströme sind in jeder Generation bekannt und können in einer Generation z durch

$$\dot{V}_z = \frac{\dot{V}_0}{2^z} \quad (3.17)$$

ausgedrückt werden, wobei \dot{V}_z den Volumenstrom in der Generation z beschreibt. Damit können die Volumenströme unabhängig von den Druckwerten berechnet werden. Die Druckwerte in den verschiedenen Generationen aus Abbildung 3.5 ergeben sich über den Volumenstrom zu

$$\begin{aligned} p_{2x} &= p_{3x} + Fric_2 \cdot \frac{\dot{V}_0}{4} + Ine_2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial \dot{V}_0}{\partial t} \\ p_1 &= p_{2x} + Bif_1 \cdot \frac{\dot{V}_0^2}{2} + Fric_1 \cdot \frac{\dot{V}_0}{2} + Ine_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \dot{V}_0}{\partial t} \\ p_0 &= p_1 + Bif_0 \cdot \dot{V}_0^2 + Fric_0 \cdot \dot{V}_0 + Ine_0 \cdot \frac{\partial \dot{V}_0}{\partial t}. \end{aligned}$$

Es wird nur der Druck in einem Bronchus je Generation berechnet. Bei asymmetrischen Randbedingungen, wird für den Druck p_{3x} der Mittelwert der Randbedingungen vorgegeben. Damit steht eine sehr einfach zu berechnende Vorgehensweise zur Verfügung mit der sichergestellt werden kann, dass die Anfangswerte nahe an der Lösung liegen. Zudem ist die Kontinuitätsgleichung initial erfüllt.

Nachdem die Startwerte bestimmt sind, können nun die Gleichungen ausgewertet und die Ergebnisse im Residuenvektor \vec{r} notiert werden. Anschließend wird der Vektor \vec{x} für den nächsten Iterationsschritt bestimmt. Die Bildungsvorschrift für das Newton Verfahren lautet

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - J(\vec{x})^{-1} \cdot \vec{r}(\vec{x}). \quad (3.18)$$

Dabei ist k der aktuelle Iterationsschritt, \vec{J} stellt die Jacobi-Matrix [12] dar, die durch

$$J(\vec{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

gebildet wird. Wichtig ist weiterhin die Wahl eines geeigneten Abbruchkriteriums. Es wird die Maximumnorm verwendet, welche den größten Eintrag eines Vektors zurückgibt. Die Iteration läuft nun bis das Abbruchkriterium

$$\epsilon_{ist} = \max |r_i| < \epsilon_{soll} \quad (3.20)$$

erreicht wird. Auf die Wahl eines Zahlenwertes für ϵ_{soll} wird in Abschnitt 5.1 noch genauer eingegangen.

3.4 Elastizität

Um das elastische Verhalten der Lunge zu modellieren, muss die Annahme einer starren Röhre für die aufgelösten Generationen fallengelassen werden. Die Querschnittsfläche kann hierfür als Funktion des Drucks betrachtet und über

$$A(p) = A(p_{ref}) + \frac{dA}{dp} \cdot (p - p_{ref}) \quad (3.21)$$

bestimmt werden. Dabei bezeichnet $A(p_{ref})$ die Querschnittsfläche nach Weibel und p_{ref} einen Referenzdruck der vorerst mit 0 Pa angenommen wird. Der Wert $\frac{dA}{dp}$ wird zunächst mit 0 m²/Pa vorgegeben, die Fläche ist also druckunabhängig.

Es wird eine einfache Verzweigung mit dem Einlass in Generation sieben und dem Auslass in Generation acht betrachtet. Am Einlass gelten die charakteristischen Strömungsparameter $Re = 865,2$ und $Wo = 2,25$. Als Einstromrandbedingung wird eine sinusförmige Geschwindigkeit vorgegeben, deren Amplitude der geforderten Reynolds-Zahl entspricht. An den Auslässen wird $p_{21} = p_{22} = p_{ref}$ gesetzt. Es ergibt sich folgender Druckverlauf.

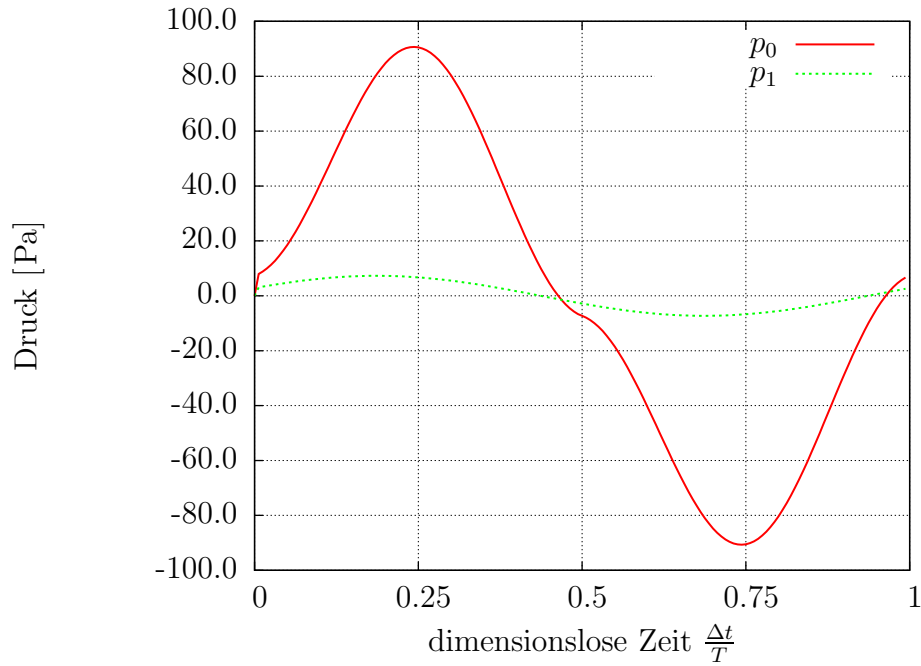


Abbildung 3.8: Druckverlauf in einer einfachen Verzweigung mit druckunabhängiger Fläche.

In Abbildung 3.8 ist der Druckverlauf der diskreten Druckwerte in einer einzelnen Verzweigung zu sehen. Auf die Verläufe wird in Abschnitt 5 genauer eingegangen. Jetzt wird $\frac{dA}{dp} = 10^{-8} \text{ m}^2/\text{Pa}$ angenommen. Da keine realistischen Materialwerte vorliegen, wird dieser Wert nur zu Testzwecken verwendet. Zudem werden die druckabhängigen Flächenwerte mit den in Abbildung 3.8 gezeigten Druckverläufen verwendet. Mit den neuen Werten für die Querschnittsflächen wird wieder ein Druckverlauf berechnet. Dieses Vorgehen wird solange wiederholt bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat. Der daraus resultierende Druckverlauf bei druckabhängiger Fläche ist in Abbildung 3.9 dargestellt.

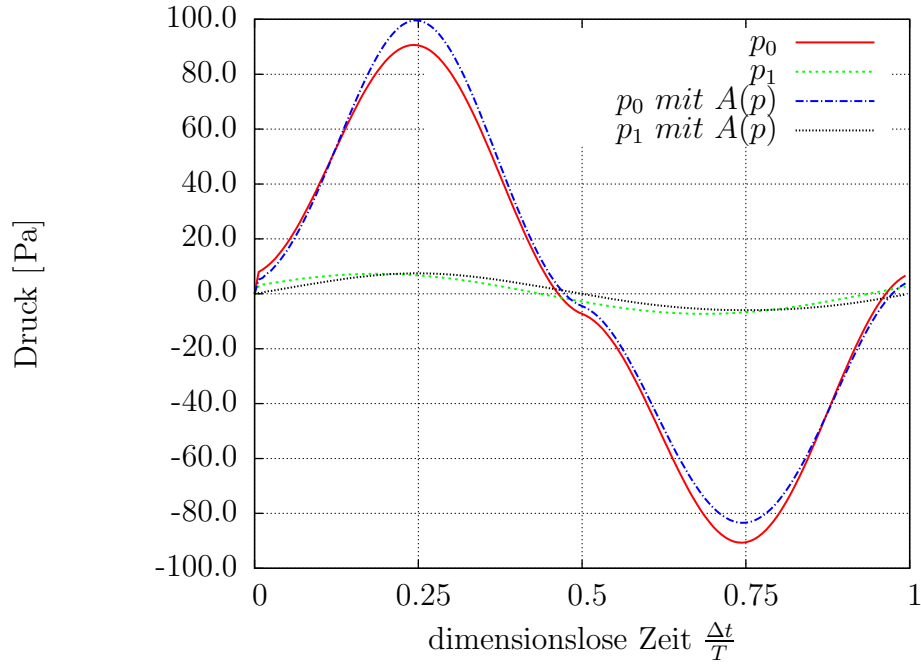


Abbildung 3.9: Druckverlauf in einer einfachen Verzweigung mit druckunabhängiger Fläche (p_0 und p_1) im Vergleich zum Verlauf mit druckabhängiger Fläche (p_0 mit $A(p)$ und p_1 mit $A(p)$).

Es ist also möglich eine druckabhängige Fläche im Bernoulli-Modell zu berücksichtigen. Auf diese Weise kann das elastische Verhalten des Lungengewebes berücksichtigt werden. Der Faktor $\frac{dA}{dp}$ stellt letztendlich einen nicht-linearen Materialparameter dar. Um das elastische Verhalten der mit dem Modell aufgelösten Generationen der Lunge beschreiben zu können, müsste daher für jede Generation ein solcher Parameter gefunden bzw. angenommen werden. Da in der Literatur nicht ausreichend Daten für das lokale Materialverhalten einzelner Lungenareale zu finden sind, kommt diese Modellierung hier nicht in Frage. Das elastische Verhalten des Lungengewebes bleibt daher unberücksichtigt.

3.5 Modell komplexer Widerstände

Für die Bewertung des entwickelten Bernoulli-Modells, wird im Folgenden ein zweites Modell beschrieben, dessen Ergebnisse für Vergleiche verwendet werden. Dieses Modell basiert auf den in Abschnitt 1 erwähnten Arbeiten von Olufsen *et al.* [19, 20].

3.5.1 Prinzip des Modells

Die Arbeiten von Olufsen beschäftigen sich mit der Blutströmung im menschlichen Körper. Aufgrund der Ähnlichkeit der von Olufsen verwendeten Geometrie zum Weibelmodell, wurde dieses Modell bereits von Comerford *et al.* [4] auf den Bronchialbaum angewendet. Die Verzweigungen sind hier jedoch nicht berücksichtigt.

Die Ventilation in der menschlichen Lunge stellt eine oszillierende Strömung dar, die von der Frequenz der Oszillation abhängt. Die Betrachtungen werden daher im Frequenzbereich durchgeführt. In der Arbeit von Comerford wird, analog zu Olufsen, jedem Bronchus der Lunge eine Impedanz zugeordnet. Die Grundgleichung lautet

$$Z(0, \omega) = \frac{\frac{i}{g} \cdot \sin(\frac{\omega \cdot l}{c}) + Z(l, \omega) \cdot \cos(\frac{\omega \cdot l}{c})}{\cos(\frac{\omega \cdot l}{c}) + i \cdot g \cdot Z(l, \omega) \cdot \sin(\frac{\omega \cdot l}{c})} \quad (3.22)$$

und definiert die Impedanz am Eingang eines Bronchus $Z(0, \omega)$, in Abhängigkeit von der Ausflussimpedanz $Z(l, \omega)$. Dabei ist c die komplexe Wellengeschwindigkeit und g das Produkt aus Wellengeschwindigkeit und Compliance. Für die Impedanz am Ausgang kann anfangs eine Nullimpedanz angenommen werden. Für jeden Bronchus am Auslass wird nun eine Eingangsimpedanz berechnet. An einer Verzweigung besitzen die beiden Bronchien der Tochtergeneration jeweils eine Eingangsimpedanz, welche über

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{Z_{t1}} + \frac{1}{Z_{t2}} \quad (3.23)$$

reziprok addiert wird. Damit ergibt sich die Ausgangsimpedanz des Bronchus der Elterngeneration. In Gleichung (3.23) sind die Eingangsimpedanzen der Tochtergeneration mit Z_{t1} bzw. Z_{t2} bezeichnet. Die Ausgangsimpedanz der Elterngeneration ist mit Z_e bezeichnet. Wenn nun in Gleichung (3.22) die Impedanz Z_e als Ausgangsimpedanz eingesetzt wird, ergibt sich die Eingangsimpedanz für den Bronchus der Elterngeneration. Somit können die Impedanzen eines beliebigen Bronchialbaumes berechnet und auf dessen Eingangsimpedanz zurückgeführt werden. Diese wird nun wieder in den Zeitbereich transformiert, was mittels der Gleichung

$$z(t) = Z(0, \omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (3.24)$$

durchgeführt wird. Der Druck am Eingang des Systems ergibt sich aus dem Faltungsin-
tegral der Impedanz mit dem Volumenstrom

$$p(t) = \int_0^t z(t - \tau) \cdot \dot{V}(\tau) d\tau, \quad (3.25)$$

wobei $z(t)$ die Impedanz im Zeitbereich darstellt.

Das vorgestellte Impedanz-Modell wird in der vorliegenden Arbeit ausschließlich für den Vergleich mit den Berechnungen auf Basis des symmetrischen Bernoulli-Modells verwendet. In der Arbeit von Comerford wurde das Impedanz-Modell genauer untersucht. Beispielsweise wurde das elastische Verhalten der Bronchien berücksichtigt.

Dem Modell liegt die analytische Lösung für eine oszillierende Rohrströmung zugrunde. Da diese für sinusförmige Druckschwingungen hergeleitet ist, ist die Betrachtung nicht-sinusförmiger Verläufe schwierig. Beliebige zeitliche Verläufe müssen durch die Überlagerung verschiedener Sinusschwingungen nachgebildet werden. Damit steigt der Aufwand des Modells und es entsteht ein zusätzlicher Fehler durch die Nachbildung.

Die Auswertungen des Impedanz-Modells stellen daher keine Bewertung dar, sondern dienen lediglich als Referenz für das Bernoulli-Modell.

4 Implementierung

Die Umsetzung des entwickelten Modells erfolgt mittels eines C++ Programms. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Schritte der Implementierung vorgestellt. Abbildung 4.1 zeigt das Struktogramm des Programms.

Zunächst werden alle nötigen Variablen und Felder initialisiert und die zeitunabhängigen Parameter festgelegt. Dann startet die Zeitschleife, mit der ein Atem- oder Beatmungszyklus simuliert wird. In jedem Schleifendurchlauf werden die Randbedingungen definiert, anschließend wird der Vektor der Startwerte bestimmt und der zugehörige Residuenvektor erzeugt. Stellen die Anfangswerte nicht die gesuchte Lösung dar, folgt die iterative Lösung des Gleichungssystems. Sobald die Lösung erreicht ist, können die benötigten Daten in eine Datei ausgegeben werden.

Die einzelnen Bestandteile und Funktionen, werden in den folgenden Abschnitten genauer erläutert.

KAPITEL 4. IMPLEMENTIERUNG

| |
|---|
| Generation für Ein- und Auslass festlegen |
| Fluideigenschaften festlegen |
| Compliance-Werte für die Auslässe festlegen |
| Felder für Volumen und Druckwerte am Auslass anlegen |
| Frequenz der Oszillation festlegen |
| Zeitliche Diskretisierung festlegen |
| Für: $j = 0$ bis $j < \text{Zeitschritte}$, $j++$ |
| Volumenstrom für den aktuellen Zeitschritt berechnen (\dot{V}^{tk}) |
| Zeitschrittweite vom vergangenen zum aktuellen Zeitschritt festlegen |
| Felder für Residuen (r), Startwerte (x), Werte für nächsten Zeitschritt (x_{Next}) anlegen |
| Berechnen der Startwerte |
| Überprüfen, ob die Lösung bereits erreicht ist |
| Solange $\max \text{Abw} > \epsilon_{\text{sol}}$ |
| Generieren der Gleichungen (Residuenvektor, Funktion: <code>setGlSys</code>) |
| Generieren der Jacobi-Matrix (Funktion: <code>setJac</code>) |
| Lösen des Gleichungssystems (bestimmen von x_{Next} , Funktion: <code>solveGlSys</code>) |
| Für: $i = 0$ bis $i = \text{Anzahl Unbekannte}$ |
| $x^i = x^i + x_{\text{Next}}^i$ |
| Bestimmen der maximalen Abweichung |
| Rückgabe des Unbekanntenvektors |
| Speichern des Unbekanntenvektors und \dot{V}^{tk} (zur Verwendung im nächsten Zeitschritt) |
| Berechnen des Volumens an allen Auslässen |
| Berechnen des Drucks an allen Auslässen (als Druckrandbedingung für den nächsten Zeitschritt) |
| Ausgabe der benötigten Daten in Dateien |
| Löschen der Felder |

Abbildung 4.1: Struktogramm mit den wichtigsten Arbeitsschritten zur Bestimmung des Druckverlustes in einem beliebigen Bronchialbaum

Um einen gesamten Atem- oder Beatmungszyklus zu simulieren, werden verschiedene Eingabegrößen benötigt. Darunter sind Werte, welche während des gesamten Zyklus unverändert bleiben. Dazu zählen

- die Generationstiefe (GT, Angabe der Generationen in denen sich Ein- und Auslass befinden)
- die Fluideigenschaften (ρ und ν)
- die Compliance-Werte an den Auslässen, sowie

KAPITEL 4. IMPLEMENTIERUNG

- die Kreisfrequenz ω der oszillierenden Strömung.

Die Angabe der Generationstiefe ist nötig, da das entwickelte Programm eine Modellierung der Strömung in einer Lungengeometrie mit beliebig vielen Verzweigungen ermöglicht. Es kann also entweder der gesamte Bronchialbaum mit 24 Generationen, oder nur ein Teil des Bronchialbaumes, z.B. von Generation sieben bis siebzehn behandelt werden.

Zusätzlich sind noch Variablen nötig, die in jedem Zeitschritt aktualisiert werden. Dazu gehören

- der aktuelle Volumenstrom am Einlass (\dot{V}^{tk})
- der Volumenstrom am Einlass aus dem letzten Zeitschritt (\dot{V}^{tk-1})
- die Zeitschrittweite des aktuellen Zeitschritts (Δt), sowie
- der Lösungsvektor aus dem letzten Zeitschritt.

Für die Abschätzung von Druckverlusten in einem Bronchialbaum werden die Werte \dot{V}^{tk} und Δt vorgegeben. Wird das Modell dagegen als Randbedingung in einer dreidimensionalen Strömungssimulation verwendet, so werden diese Werte von der Simulation bereitgestellt. Im ersten Zeitschritt werden der Lösungsvektor des letzten Zeitschrittes und \dot{V}^{tk-1} zu null gesetzt. Wie in Abschnitt 3.3 bereits angesprochen wurde, werden die Ableitungen der Volumenströme über Rückwärtsdifferenzen bestimmt. Daher werden der Lösungsvektor (welcher die berechneten Werte für Druck und Volumenstrom enthält) und der Volumenstrom \dot{V}^{tk} am Einlass gespeichert, damit diese im nächsten Zeitschritt zur Verfügung stehen. Im darauffolgenden Zeitschritt können mit den gespeicherten Werten und der Zeitschrittweite Δt die Ableitungen ermittelt werden. Eine Fehlerabschätzung für die Rückwärtsdifferenzen wird in Abschnitt 4.4 vorgenommen.

Sobald alle nötigen Werte bereitstehen, können vom Programm die Felder für den Vektor der Startwerte und den Residuenvektor angelegt werden. Die benötigte Feldgröße entspricht der Anzahl der Unbekannten n des Gleichungssystems, welche über

$$n = \sum_{z=0}^{GT} (2^z + 2^{z-1}) \quad (4.1)$$

berechnet wird. Weiterhin werden zwei Felder für die Volumina und die Druckwerte am Auslass angelegt. Die Feldgröße entspricht der Anzahl der Auslässe, welche sich aus

$$2^{GT-1} \tag{4.2}$$

ergibt.

Wie in Abschnitt 3.3 bereits erläutert, wird anschließend eine symmetrische Lösung berechnet, die als Startwert für die iterative Lösung des Gleichungssystems in diesem Zeitschritt fungiert. Mit diesem Anfangswert wird der Residuenvektor erzeugt. Das geschieht mittels der Funktion `setGlSys`, welche später noch im Detail erläutert ist. Wenn eine symmetrische Lösung gesucht ist, erfüllt der Vektor der Startwerte bereits das Abbruchkriterium und stellt die Lösung des Gleichungssystems dar.

Bei asymmetrischen Problemstellungen, startet die iterative Lösungssuche. Zunächst wird die Jacobi-Matrix mit der Funktion `setJac` ermittelt und der Lösungsvektor für den nächsten Iterationsschritt berechnet. Auf die Funktion `setJac` wird später genauer eingegangen. Dieses Vorgehen wird solange wiederholt, bis das geforderte Abbruchkriterium erreicht ist.

Wenn als Randbedingung des Modells ein Ballon verwendet wird, muss das Volumen an den Auslässen bestimmt werden. Dazu wird der Volumenstrom über die vergangenen Zeitschritte aufintegriert. Man erhält das Volumen, das sich im aktuellen Zeitschritt im Ballon des jeweiligen Auslasses befindet. Dieses Volumen ist durch das Ein- und Ausströmen in der Vergangenheit definiert. Die Umsetzung der Integration erfolgt über eine Aufsummierung der einzelnen Volumenströme mittels

$$V = \sum_{tk=0}^{n_{tk}} \dot{V}^{tk} \cdot \Delta t. \tag{4.3}$$

Eine Fehlerabschätzung dieser Integrationsmethode wird in Abschnitt 4.4 vorgenommen. Mit den Werten der Volumina kann der Druck im Ballon bestimmt werden, welcher als Druckrandbedingung für den nächsten Zeitschritt vorgegeben wird. Die Bestimmung des Druckes erfolgt mit den Gleichungen aus Abschnitt 3.2.2.

Anschließend werden die Werte für den aktuellen Volumenstrom am Einlass (\dot{V}^{tk}), der Lösungsvektor, die Volumina und die Druckwerte am Auslass für den nächsten Zeitschritt abgespeichert. Dann wird der für die Felder reservierte Speicher wieder freigegeben und

der nächste Zeitschritt kann bearbeitet werden.

4.1 Aufstellen der Gleichungen (Funktion `setGlSys`)

In diesem Abschnitt soll der Quelltext der Funktion erklärt werden, der für das Programm umgesetzt wurde.

In Abschnitt 3.3 wurde das Gleichungssystem für einen Bronchialbaum mit $GT = 3$ erläutert. Um das Gleichungssystem für einen Bronchialbaum mit beliebiger Generationstiefe aufzustellen, werden zunächst die Bezeichnungen p und \dot{V} durch die Indizierung des Lösungsvektors x ersetzt. Für einen Bronchialbaum mit $GT = 4$ ergibt sich dieser zu

$$\begin{aligned} \vec{x}^T = [p_0, p_1, p_{21}, \dot{V}_{11}, p_{22}, \dot{V}_{12}, p_{31}, \dot{V}_{21}, p_{32}, \dot{V}_{22}, p_{33}, \dot{V}_{23}, p_{34}, \dot{V}_{24}, \\ \dot{V}_{31}, \dot{V}_{32}, \dot{V}_{33}, \dot{V}_{34}, \dot{V}_{35}, \dot{V}_{36}, \dot{V}_{37}, \dot{V}_{38}]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

In den Gleichungen wird also p_0 durch $x[0]$ ersetzt, p_1 durch $x[1]$ ersetzt usw.

Das Gleichungssystem wird durch Bernoulli-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichungen definiert.

Die Anzahl der Bernoulli-Gleichungen wird über

$$n_{Druck} = \sum_{z=0}^{GT} 2^z \quad (4.5)$$

berechnet. Die aus den Bernoulli-Gleichungen resultierenden Residuen lauten in unserem Beispiel ($GT = 4$) wie folgt.

$$\begin{aligned}
r_0 &= x_0 - x_1 - Bif_0 \cdot \dot{V}_0 - Fric_0 \cdot \dot{V}_0 - Ine_0 \cdot \frac{\partial \dot{V}_0}{\partial t} \\
r_1 &= x_1 - x_2 - Bif_1 \cdot x_3^2 - Fric_1 \cdot x_3 - Ine_1 \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t} \\
r_2 &= x_1 - x_4 - Bif_1 \cdot x_5^2 - Fric_1 \cdot x_5 - Ine_1 \cdot \frac{\partial x_5}{\partial t} \\
r_3 &= x_2 - x_6 - Bif_2 \cdot \dot{x}_7^2 - Fric_2 \cdot x_7 - Ine_2 \cdot \frac{\partial x_7}{\partial t} \\
r_4 &= x_2 - x_8 - Bif_2 \cdot \dot{x}_9^2 - Fric_2 \cdot x_9 - Ine_2 \cdot \frac{\partial x_9}{\partial t} \\
r_5 &= x_4 - x_{10} - Bif_2 \cdot \dot{x}_{11}^2 - Fric_2 \cdot x_{11} - Ine_2 \cdot \frac{\partial x_{11}}{\partial t} \\
r_6 &= x_4 - x_{12} - Bif_2 \cdot \dot{x}_{13}^2 - Fric_2 \cdot x_{13} - Ine_2 \cdot \frac{\partial x_{13}}{\partial t} \\
r_7 &= x_6 - p_{41} - Fric_3 \cdot x_{14} - Ine_3 \cdot \frac{\partial x_{14}}{\partial t} \\
r_8 &= x_6 - p_{42} - Fric_3 \cdot x_{15} - Ine_3 \cdot \frac{\partial x_{15}}{\partial t} \\
r_9 &= x_8 - p_{43} - Fric_3 \cdot x_{16} - Ine_3 \cdot \frac{\partial x_{16}}{\partial t} \\
r_{10} &= x_8 - p_{44} - Fric_3 \cdot x_{17} - Ine_3 \cdot \frac{\partial x_{17}}{\partial t} \\
r_{11} &= x_{10} - p_{45} - Fric_3 \cdot x_{18} - Ine_3 \cdot \frac{\partial x_{18}}{\partial t} \\
r_{12} &= x_{10} - p_{46} - Fric_3 \cdot x_{19} - Ine_3 \cdot \frac{\partial x_{19}}{\partial t} \\
r_{13} &= x_{12} - p_{47} - Fric_3 \cdot x_{20} - Ine_3 \cdot \frac{\partial x_{20}}{\partial t} \\
r_{14} &= x_{12} - p_{48} - Fric_3 \cdot x_{21} - Ine_3 \cdot \frac{\partial x_{21}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung wird separat aufgestellt, da hier die Randbedingung am Einlass (\dot{V}_0) eingeht. Diese benötigt, unabhängig von der Generationstiefe, stets die gleichen Komponenten des Lösungsvektors.

Die Werte der Gleichungen r_1 bis r_6 werden in einer Zählschleife ermittelt, die für eine beliebige Generationstiefe von (1) bis $(n_{Druck} - 2^{(GT-1)})$ läuft. Der Zählindex der Schleife referenziert dabei die jeweilige Gleichung. Um der aktuellen Gleichung die benötigten Komponenten des Lösungsvektors zuzuordnen, werden drei weitere Zählvariablen angelegt. Die erste ordnet dem ersten Term der Gleichungen die jeweilige Komponente des

KAPITEL 4. IMPLEMENTIERUNG

Lösungsvektors zu. Eine zweite wird für die restlichen Terme benötigt. Die dritte zählt die Bernoulli-Gleichungen in einer Generation mit. Damit können die Druckverluste Bif_z , $Fric_z$ und Ine_z für die jeweilige Generation bestimmt werden.

Die Residuen r_7 bis r_{14} ergeben sich aus den Bernoulli-Gleichungen der letzten Generation des Bronchialbaumes. Hier werden die Druckrandbedingungen am Auslass eingesetzt (für $GT = 4$ sind das p_{41} bis p_{48}). In Abschnitt 3.1.2 wurde erläutert, dass in der letzten Generation keine Druckverluste durch Verzweigungen anfallen, diese werden in den Gleichungen auch nicht berücksichtigt. Die Zählschleife läuft für eine beliebige Generationstiefe von $(n_{Druck} - 2^{(GT-1)} + 1)$ bis (n_{Druck}) . Zur Zuordnung der Komponenten des Lösungsvektors können die bereits angelegten Zählvariablen verwendet werden. Aufgrund der Struktur des Lösungsvektors ist jedoch ein anderer Zählalgorithmus nötig.

Nach den Bernoulli-Gleichungen werden die Kontinuitätsgleichungen aufgestellt. Im betrachteten Beispiel ($GT = 4$) lauten diese

$$\begin{aligned}r_{15} &= \dot{V}_0 - x_3 - x_5 \\r_{16} &= x_3 - x_7 - x_9 \\r_{17} &= x_5 - x_{11} - x_{13} \\r_{18} &= x_7 - x_{14} - x_{15} \\r_{19} &= x_9 - x_{16} - x_{17} \\r_{20} &= x_{11} - x_{18} - x_{19} \\r_{21} &= x_{13} - x_{20} - x_{21}.\end{aligned}$$

Die Anzahl der Kontinuitätsgleichungen ergibt sich aus der Differenz von n und n_{Druck} . Auch hier wird die erste Gleichung separat betrachtet, da hier die Randbedingung am Einlass (\dot{V}_0) eingeht. Die Gleichung hat, analog zur ersten Bernoulli-Gleichung, stets die gleiche Form.

Die Gleichungen r_{16} und r_{17} werden in einer Zählschleife aufgestellt. Im allgemeinen Fall läuft diese von $(n_{Druck} + 1)$ bis $\left(n - \frac{2^{GT-1}}{2} - 1\right)$. Um der jeweiligen Gleichung die benötigten Komponenten des Lösungsvektors zuzuordnen, werden wieder zwei Zählvariablen angelegt. Eine für den ersten Term und eine für die Terme zwei und drei.

Die Gleichungen r_{18} bis r_{21} stellen die Kontinuitätsgleichungen der letzten Generation dar. Es werden die Zählvariablen aus der ersten Schleife verwendet. Aufgrund der Struk-

tur von \vec{x} sind jedoch andere Zählalgorithmen nötig. Für eine beliebige Generationstiefe läuft die Zählschleife von $\left(n - \frac{2^{GT-1}}{2}\right)$ bis (n) .

Bei der Berechnung der Kontinuitätsgleichungen können die Werte der Volumenströme sehr klein werden. Das gilt besonders bei einer hohen Generationstiefe. Als Abbruchkriterium ϵ_{soll} wird das maximale Residuum benutzt. Bei Volumenströmen $\ll \epsilon_{soll}$ kann das Residuum das Abbruchkriterium erfüllen, obwohl die Kontinuitätsgleichung nicht erfüllt ist. Um dieses zu vermeiden, werden alle Volumenströme mit dem kleinsten Volumenstrom der symmetrischen Lösung normiert.

Die ausführliche Beschreibung der Funktion sowie die Zählalgorithmen finden sich im Anhang. In Abschnitt A.1 ist der Quelltext der Funktion `setGlSys` angeführt.

4.2 Aufbau der Jacobi-Matrix (Funktion `setJac`)

Das Gleichungssystem (3.8) der Form $f(\vec{x}) = \vec{b}$ wird mit einem Newton-Raphson-Verfahren gelöst. Dafür wird die inverse Jacobi-Matrix (vgl. Gleichung (3.18)) benötigt. Die analytische Invertierung großer Matrizen bedeutet einen hohen numerischen Aufwand. Darüber hinaus führt die Invertierung einer dünnbesetzten Matrix zu einer vollbesetzten Matrix. Ausgehend von Gleichung (3.18) wird die Umformung

$$\begin{aligned}\vec{x}^{k+1} &= \vec{x}^k - J(\vec{x})^{-1} \cdot f(\vec{x}) \\ \vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k &= \vec{\Delta x} = -J(\vec{x})^{-1} \cdot f(\vec{x}) \\ J(\vec{x}) \cdot \vec{\Delta x} &= -J(\vec{x}) \cdot J(\vec{x})^{-1} \cdot f(\vec{x}),\end{aligned}$$

vorgenommen, so dass sich

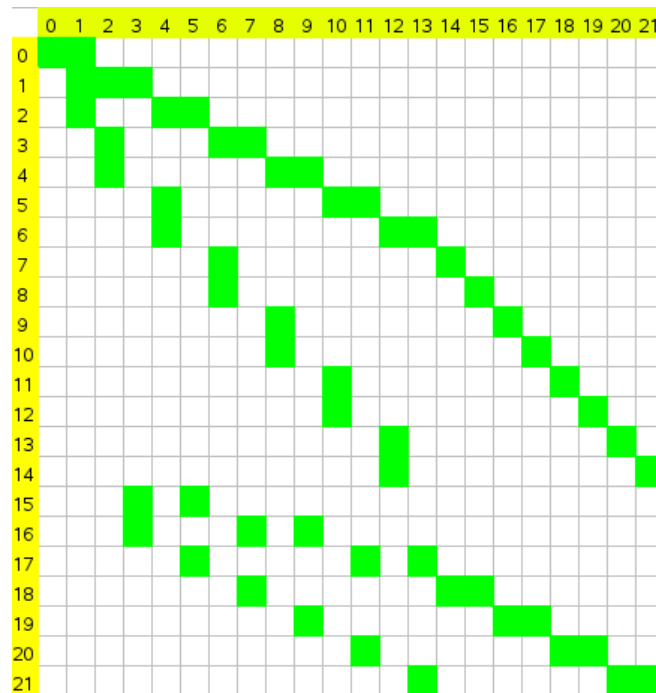
$$J(\vec{x}) \cdot \vec{\Delta x} = -f(\vec{x}) \tag{4.6}$$

ergibt. Anstatt nun analytisch die inverse Jacobi-Matrix zu bestimmen, wird das lineare Gleichungssystem aus Gleichung (4.6) mittels der Funktion `solveGlSys` (vgl. Abschnitt 4.3) gelöst, der Vektor für den nächsten Iterationsschritt ergibt sich aus

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \vec{\Delta x}. \quad (4.7)$$

Diese Abwandlung des Newton-Raphson-Verfahrens wird als Gauss-Newton-Verfahren bezeichnet [9].

Die Jacobi-Matrix hat für einen Bronchialbaum mit $GT = 3$ die Struktur, welche in Abbildung 4.2 dargestellt ist.



grün markierte Zellen:
Einträge $\neq 0$

weiße Zellen:
Einträge $= 0$

Abbildung 4.2: Besetzungsstruktur der Jacobi-Matrix für einen Bronchialbaum über vier Generationen. Die horizontale Nummerierung stellt die Spaltenindizes dar, die vertikale die Zeilenindizes. Die grün markierten Zellen bezeichnen einen Eintrag $\neq 0$, alle anderen Zellen haben den Eintrag 0

Die in Abbildung 4.2 dargestellte Matrix ist dünnbesetzt, da der Großteil der Matrixeinträge null ist. Jede Zeile entspricht einer Gleichung, in den jeweiligen Spalten stehen die Ableitungen nach den einzelnen Variablen. Der Aufbau der Jacobi-Matrix folgt der Gleichung (3.19) in Abschnitt 3.3 und erfolgt mit ähnlichen Zählalgorithmen, wie bei den Gleichungen, welche in Abschnitt 4.1 erläutert sind.

Um die Matrixeinträge möglichst effizient speichern zu können, ist es wichtig zu wissen, wie die Daten weiterverarbeitet werden. Das Gleichungssystem (4.6) wird mit einem

KAPITEL 4. IMPLEMENTIERUNG

Algorithmus gelöst, der speziell für lineare Gleichungssysteme mit dünnbesetzter Koeffizientenmatrix optimiert ist. Der Löser ist in der Softwarebibliothek UMFPACK [28] enthalten und ist als freie Software verfügbar. Der verwendete Gleichungslöser benötigt als Eingabewerte drei eindimensionale Felder. Im ersten Feld muss die kumulierte Anzahl der Matrixeinträge abgelegt sein, also ist der erste Eintrag null, der zweite die Anzahl der Einträge in der ersten Spalte, der dritte Eintrag die Summe der Einträge der ersten und der zweiten Spalte, usw. Das zweite Feld muss die Zeilenindizes der Einträge enthalten und das dritte Feld die Einträge selbst. Da das entwickelte Programm die Gleichungen zeilenweise aufstellt, wird auch die Jacobi-Matrix zeilenweise aufgebaut. Die Verarbeitung durch den Gleichungslöser erfolgt jedoch spaltenweise.

In Abbildung 4.2 ist die Besetzungsstruktur der Jacobi-Matrix dargestellt. Nur die grün hervorgehobenen Zellen sind ungleich null. Es wurden drei Möglichkeiten zur Verarbeitung der Daten getestet und verglichen. Die drei umgesetzten Möglichkeiten sind:

a) Anlegen einer $n \times n$ Matrix:

Es werden hauptsächlich Nullen gespeichert. Anschließend kann die Matrix jedoch einfach spaltenweise abgesucht werden, um die benötigten Daten für den Löser bereitzustellen.

b) Anlegen eines $3 \times m$ Feldes:

Hier werden nur die Einträge und die zugehörigen Zeilen- und Spaltenindizes gespeichert. Mit m ist die Anzahl der Matrixeinträge bezeichnet. Jeder Matrixeintrag wird zusammen mit dem zugehörigen Zeilen- und Spaltenindex abgespeichert. Das spart Speicherplatz, jedoch ist ein spaltenweises Durchsuchen der Felder wesentlich aufwendiger.

c) Generierung von Listen:

Listen verhalten sich ähnlich wie Felder, die Anzahl der zu speichernden Elemente muss jedoch vorher nicht bekannt sein. In einem Feld von Listen, wird für jede Spalte der Matrix eine Liste angelegt. Der Spaltenindex des betrachteten Eintrags bestimmt, in welcher Liste der Wert gespeichert werden soll. In der Liste werden dann der Zeilenindex und der Wert selbst gespeichert. Ein anschließendes durchsuchen der Listen ist nicht mehr nötig, da die Werte bereits so gespeichert sind, wie sie vom Gleichungslöser benötigt werden.

Die detaillierte Diskussion von Speicherplatzbedarf und Rechenzeit der drei Algorithmen folgt in Abschnitt 5.5 und der Quelltext der Funktion `setJac` in Abschnitt A.2.

4.3 Lösen des Gleichungssystems (Funktion: solveG1Sys)

In der Funktion `solveG1Sys` werden die Werte der Listen in eindimensionalen Feldern gespeichert. Anschließend werden die einzelnen Funktionen des Gleichungslösers aufgerufen. Der vollständige Quelltext der Funktion befindet sich in Abschnitt A.3.

4.4 Numerische Bestimmung von Ableitungen und Integralen

In der Gleichung (2.24) wird ein Druckverlust durch die Trägheit des oszillierenden Fluids berücksichtigt. Dieser hängt von der zeitlichen Änderung des Volumenstroms ab. Die Ableitung kann numerisch nur über eine Rückwärtsdifferenz bestimmt werden, da nur die Volumenströme der vergangenen Zeitschritte bekannt sind. Die Rückwärtsdifferenzen werden über

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(t_0) - f(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.8)$$

gebildet.

Als Druckrandbedingung wird ein volumenabhängiger Druck vorgegeben. Dazu wird der Volumenstrom über die Zeit integriert. Da das Integral von Gleichung (3.12) von 0 bis zum aktuellen Zeitschritt tk ausgeführt werden soll, sind hier nur vergangene Zeitschritte nötig. Das Integral

$$F(tk) = \int_0^{tk} f(t) \cdot dt \quad (4.9)$$

wird durch die Summation

$$S(t) = \sum_{tk=0}^{N_{tk}} f(t_k) \cdot \Delta t \quad (4.10)$$

ersetzt. Alle ermittelten Funktionswerte werden aufsummiert und mit der aktuellen Zeit-

KAPITEL 4. IMPLEMENTIERUNG

schrittweise Δt multipliziert.

Um einen typischen Verlauf für einen Atem- oder Beatmungszyklus zu erhalten, wird ein sinusförmiger Volumenstrom der Form

$$f(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (4.11)$$

betrachtet. Die Ableitung $f'(t)$ und das Integral $F(t)$ können analytisch durch

$$f'(t) = \hat{x} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (4.12)$$

$$\int_0^T f(t) \cdot dt = \frac{\hat{x}}{\omega} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)) \quad (4.13)$$

bestimmt werden. Abbildung 4.3 zeigt die Ausgangsfunktion sowie deren Ableitung und das Integral über eine gesamte Periode, jeweils auf \hat{x} normiert.

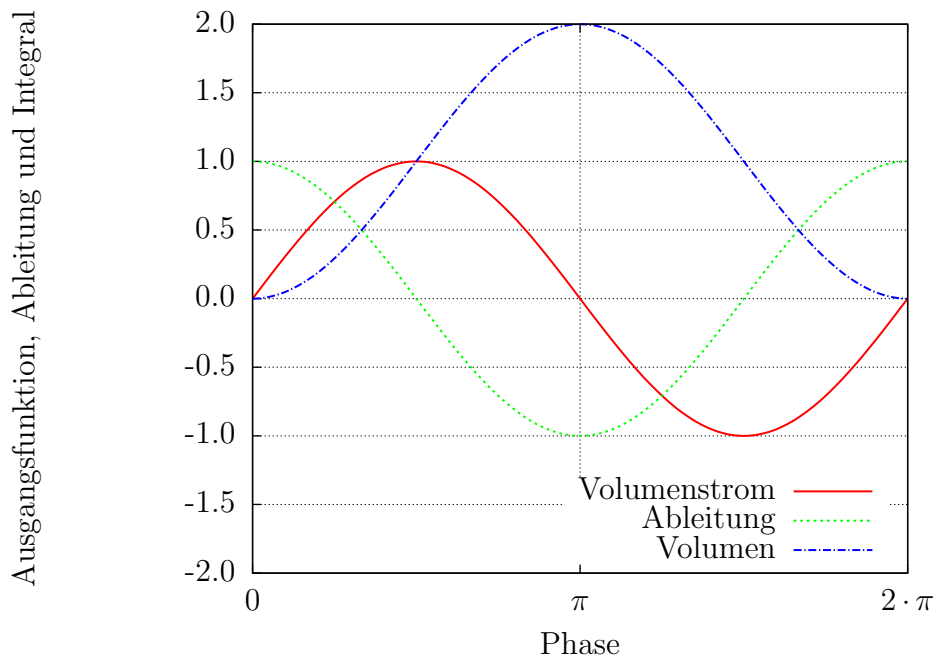


Abbildung 4.3: Verlauf eines sinusförmigen Volumenstroms, sowie dessen Ableitung und das Volumen über eine gesamte Periode

Eine Periode der Ausgangsfunktion wurde mit $2 \cdot 10^2$, $2 \cdot 10^3$, $2 \cdot 10^4$ und $2 \cdot 10^5$ äquidistant-

KAPITEL 4. IMPLEMENTIERUNG

en Punkten zeitlich diskretisiert. Die Rückwärtsdifferenzen und die Summation wurden mit den jeweiligen Diskretisierungen ausgewertet und mit den analytisch bestimmten Werten aus den Gleichungen (4.12) und (4.13) verglichen. Der Fehler s wurde über

$$s = \frac{|x - x_{analyt}|}{\hat{x}} \quad (4.14)$$

bestimmt, wobei x das Ergebnis der Gleichung (4.8) bzw. (4.10) darstellt. In Abbildung 4.4 ist der auf \hat{x} normierte Fehler s über der dimensionslosen Schrittweite $h = \frac{\Delta t}{T}$ aufgetragen.

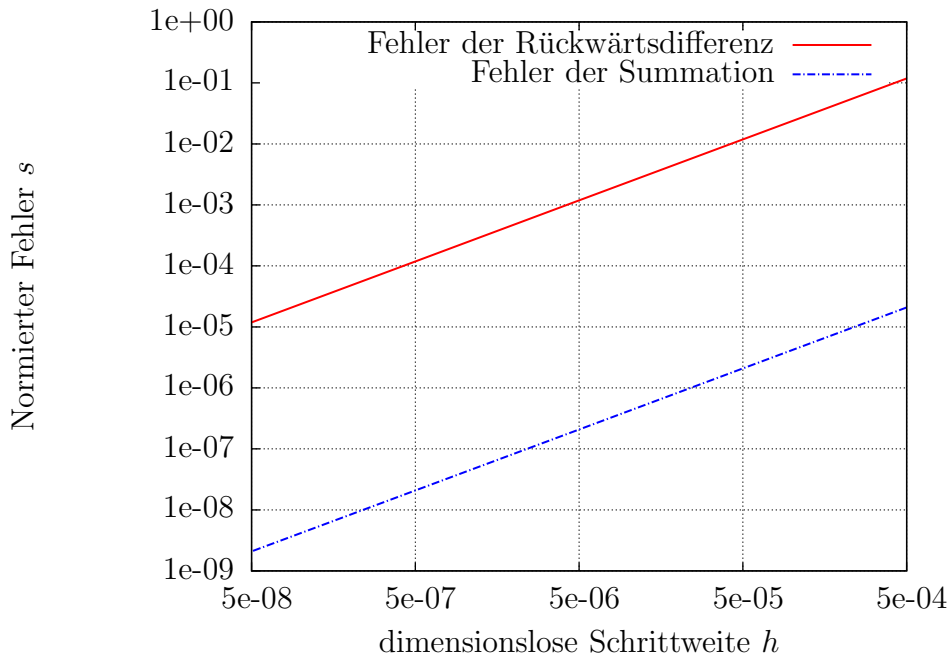


Abbildung 4.4: Maximaler Fehler der Rückwärtsdifferenz und der Summation bei der Bestimmung mit verschiedenen zeitlichen Diskretisierungen.

Abbildung 4.4 zeigt den maximalen Fehler einer Periode. Sowohl die Rückwärtsdifferenzen als auch die Integralbildung durch Summation sind Verfahren erster Ordnung, da der Anstieg der Geraden $\frac{\Delta s}{\Delta h}$ konstant ist. Bei feiner werdender Zeitdiskretisierung nimmt auch der Fehler ab.

In Abschnitt 5 wird für die zeitliche Diskretisierung eine dimensionslose Schrittweite von $5 \cdot 10^{-5}$ verwendet, da diese einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit darstellt. Da bei der Abschätzung von Druckverlusten in Bronchialbäumen ganze

KAPITEL 4. IMPLEMENTIERUNG

Atem- oder Beatmungszyklen berechnet werden, ist die zeitliche Diskretisierung enorm wichtig. Bei der Diskretisierung mit einer dimensionslosen Schrittweite von $5 \cdot 10^{-6}$ würde sich auch die Rechenzeit verzehnfachen. Auf die Rechenzeiten wird in Abschnitt 5.5 noch genauer eingegangen. Bei der Verwendung des Modells als Randbedingung wird die Zeitschrittweite von der Simulation vorgegeben. In Abschnitt 5.3 wird die Vorhersage des Bernoulli-Modells mit der einer dreidimensionalen Strömungssimulation verglichen, wobei mit einer mittleren, dimensionslosen Schrittweite von ca. 10^{-5} gerechnet wurde. Bei der numerischen Strömungssimulation ist die zeitliche Diskretisierungen nicht äquidistant. Das vorgestellte Bernoulli-Modell kann ebenfalls mit variablen Zeitschritten rechnen. Um die Ableitung eines Volumenstroms genauer zu bestimmen, wäre eine Diskretisierung mit einem Verfahren höherer Ordnung möglich.

5 Ergebnisse und Auswertung

In diesem Abschnitt wird das Bernoulli-Modell getestet und die Ergebnisse werden diskutiert. Da hierfür ein Gleichungssystem iterativ gelöst wird, folgt in Abschnitt 5.1 eine Untersuchung des Konvergenzverhalten des umgesetzten Verfahrens. Anschließend wird in den Abschnitten 5.2, 5.3 und 5.4 das Modell auf einen einzelnen Bronchus, eine einzelne Verzweigung und auf Bronchialbäume angewendet. In Abschnitt 5.5 wird auf den Bedarf an Speicherplatz und Rechenzeit eingegangen. Abschließend werden in Abschnitt 5.6 die Ergebnisse diskutiert, die sich bei Vorgabe nicht-sinusförmiger Volumenströme ergeben.

5.1 Konvergenzbetrachtung

Da das Gleichungssystem mittels des Gauss-Newton-Verfahrens gelöst wird, ist es wichtig gute Startwerte für die Iteration zu finden. Wie in Abschnitt 3.3 angesprochen, wird hierfür eine symmetrische Lösung als Anfangsbedingung herangezogen. Zur Untersuchung der Konvergenz werden vier Fälle betrachtet.

In den ersten beiden Fällen wird eine symmetrische Lösung vorgegeben und die Anfangswerte werden dahingehend verändert, dass in jeder Verzweigung nachfolgend im linken Bronchus der Wert des Volumenstroms reduziert und im rechten Bronchus erhöht wird. Durch die lokale Veränderung der Volumenströme wird die Kontinuitätsgleichung verletzt. Weiterhin werden alle vorgegebenen Druckwerte reduziert, wobei an den Auslässen jeweils ein Druck von 0 Pa vorgegeben wird. Die so manipulierten Werte dienen dann als Startwert für die iterative Lösungssuche. Damit soll geprüft werden, ob das Programm zu den ursprünglich vorgegebenen Werten konvergiert.

Zusätzlich wird in den Fällen drei und vier eine symmetrische Lösung als Anfangsfeld vorgegeben. An den Auslässen werden die Drücke asymmetrisch gesetzt. In diesen Fällen soll das Programm die Druckwerte und Volumenströme entsprechend den asymmetrischen Druckvorgaben an den Auslässen berechnen.

- Fall 1:

Die Strömung im Weibelmodell wird von der Trachea bis zur Generation drei berechnet, dabei entsteht ein Gleichungssystem mit 22 Unbekannten. Die Volumenströme der Startwerte werden im linken Bronchus auf $\frac{1}{5}$ des Ausgangswertes reduziert und im rechten verdoppelt. Dabei wird die Kontinuitätsgleichung verletzt. Zusätzlich werden alle Druckwerte auf 10% des Ausgangswertes reduziert.

- Fall 2:

Die Berechnung erfolgt von der Trachea bis in die zehnte Generation, wodurch ein Gleichungssystem mit 3070 Unbekannten entsteht. Die Volumenströme werden im linken Bronchus auf $\frac{1}{100}$ des Startwertes reduziert und im rechten Bronchus auf das 20-fache des Startwertes erhöht. Zudem werden alle Druckwerte auf 1% des Startwertes reduziert.

- Fall 3:

Für den dritten Fall bleibt die Generationstiefe im Vergleich zu Fall 2 gleich, d.h. es werden elf Generationen mit 2^{10} Auslässen berechnet, an denen verschiedene Druckwerte zwischen 0 Pa und 1000 Pa per Zufallsverteilung vorgegeben werden.

- Fall 4:

Im vierten Fall werden 22 Generationen des Bronchialbaumes betrachtet, wodurch ein Gleichungssystem mit $6,3 \cdot 10^6$ Unbekannten entsteht. An den $2,1 \cdot 10^6$ Auslässen werden Zufallswerte für den Druck zwischen 0 Pa und 1000 Pa vorgegeben.

Während der iterativen Lösung wird in jedem Iterationsschritt der Residuenvektor ausgewertet. Abbildung 5.1 zeigt den maximalen Residuenwert aufgetragen über den Iterationsschritten.

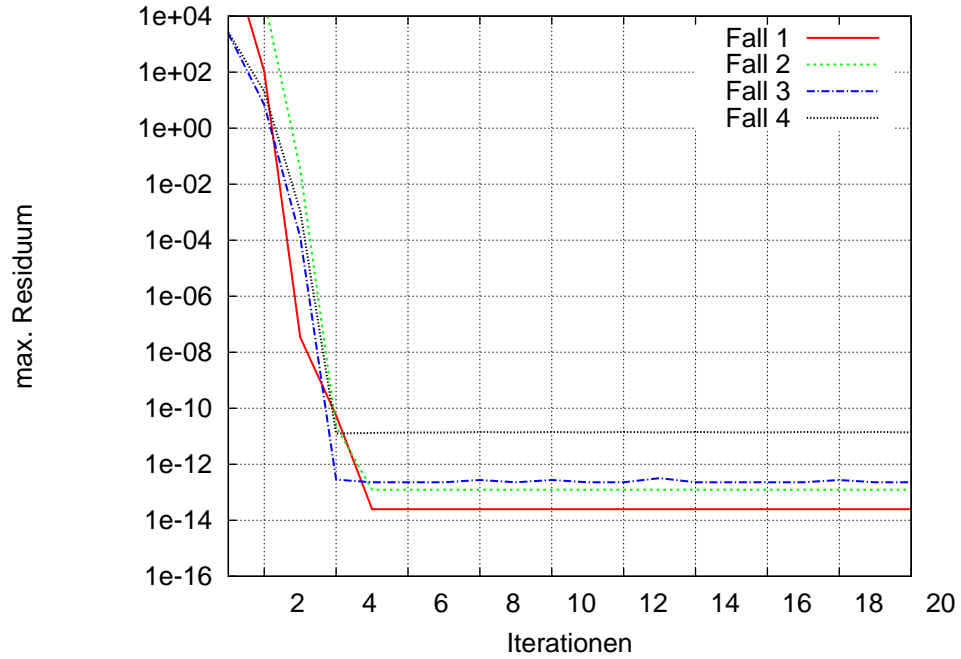


Abbildung 5.1: Darstellung der maximalen Residuen des Gauss-Newton-Verfahrens über 20 Iterationen bei der Berechnung der Fälle eins bis vier.

Abbildung 5.1 zeigt, dass die Iteration für alle untersuchten Fälle konvergiert. Bei Manipulation der Startwerte (Fall 1 und 2) ist die Lösung nach vier Iterationen mit einer Abweichung $\epsilon < 10^{-12}$ erreicht. Bei der Vorgabe von asymmetrischen Randbedingungen ändert sich der Lösungsvektor bereits nach drei Iterationen nicht mehr. Die Wahl unserer Startwerte ist daher geeignet, um eine Konvergenz der Berechnung sicherzustellen. Mit steigender Anzahl der Unbekannten, erhöht sich das maximale Residuum. Daher wird für die Anwendung das Abbruchkriterium auf

$$\epsilon_{soll} = 10^{-9} \quad (5.1)$$

festgelegt. Das bedeutet, dass in den Bernoulli-Gleichungen eine Genauigkeit von 10^{-9} Pa erreicht wird. Da die Kontinuitätsgleichungen normiert werden, wie in Abschnitt 4.1 erläutert, kann auch hier eine Genauigkeit von 10^{-6} m³/s sichergestellt werden.

Hieraus folgt, dass ein konvergentes Verfahren entwickelt wurde.

5.2 Untersuchungen an einem einzelnen Bronchus

Ausgangspunkt für den Test des Bernoulli-Modells soll eine Strömung mit festgelegten Werten für Re und Wo sein. Dazu wird in der analytischen Lösung in Gleichung (2.12) eine Womersley-Zahl und ein sinusförmiger Druckgradient vorgegeben. Das Ergebnis ist eine flächengemittelte Geschwindigkeit. Der Druckgradient wird verändert, bis sich eine Geschwindigkeit, entsprechend der vorher festgelegte Reynolds-Zahl einstellt.

Als Randbedingung für das Bernoulli-Modell wird eine sinusförmige Geschwindigkeit, deren Amplitude der vorgegebenen Reynolds-Zahl entspricht, und die Womersley-Zahl vorgegeben. Damit der aus der Geschwindigkeit resultierende Volumenstrom durch den Bronchus fließen kann, ist eine Druckdifferenz zwischen Ein- und Auslass erforderlich. Das Bernoulli-Modell berechnet diese mittels Gleichung (2.24). Anschließend wird das Ergebnis mit der analytischen Lösung verglichen. Die in Gleichung (2.24) beinhalteten Druckverluste durch Verzweigungen werden nicht berücksichtigt, da diese an einem einzelnen Bronchus nicht auftreten. Zusätzlich werden die Ergebnisse mit dem in Abschnitt 3.5 vorgestellten Impedanz-Modell verglichen.

Die maximale Druckamplitude während einer Periode der oszillierenden Rohrströmung bei $Re = 1000$ ist in Abbildung 5.2 über die Womersley-Zahl aufgetragen. Die Amplitude wird auf die Lösung der stationären Strömung ohne Trägheitseinfluss (Gleichung (2.18)) normiert.

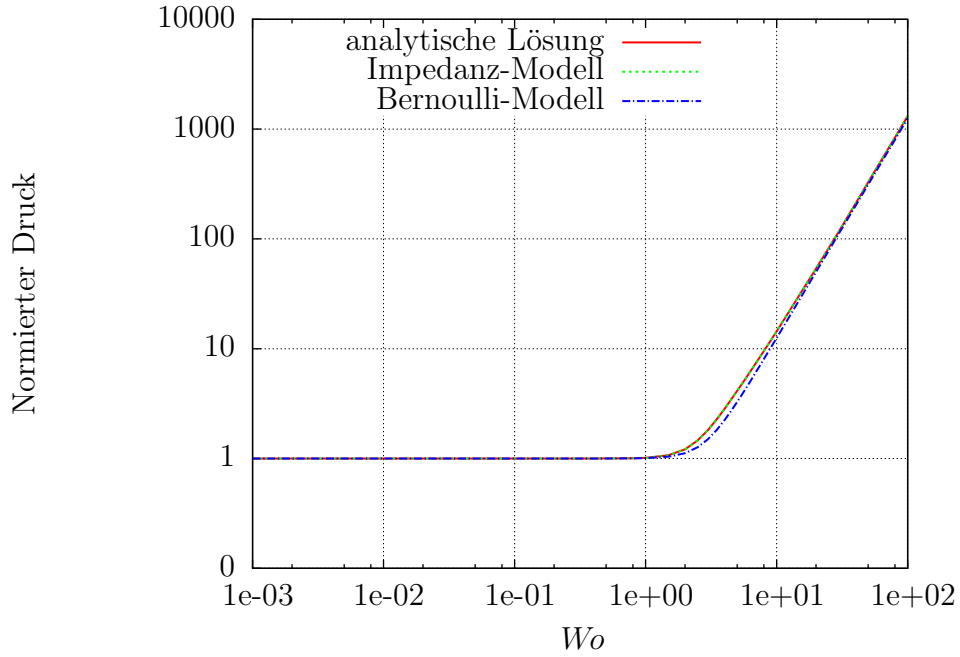


Abbildung 5.2: Maximale Druckamplitude im Verlauf einer Periode der oszillierenden Rohrströmung, normiert auf die Lösung einer voll ausgebildeten, laminaren Strömung (Hagen-Poiseuille-Strömung).

Wie bereits in Abbildung 2.4 angedeutet, erkennt man in Abbildung 5.2, dass ab $Wo \geq 1$, die Trägheit des oszillierenden Fluids eine zunehmende Rolle spielt. Bis $Wo = 1$ gleichen die Ergebnisse der untersuchten Modelle der Lösung nach Gleichung (2.18), während der Druckverlust bei $Wo = 10$ schon ca. den 15-fachen Wert annimmt. Um das Verhalten der Modelle bei verschiedenen Womersley-Zahlen genauer zu untersuchen, ist in Abbildung 5.3 der relative Fehler der Modelle gegenüber der analytischen Lösung dargestellt. Der Fehler wurde über

$$h = \frac{|p_{\text{analyt}} - p|}{p_{\text{analyt}}}$$

gebildet. Mit p_{analyt} ist der Druckgradient aus Gleichung (2.12) bezeichnet, während p das Ergebnis der betrachteten Modells widerspiegelt.

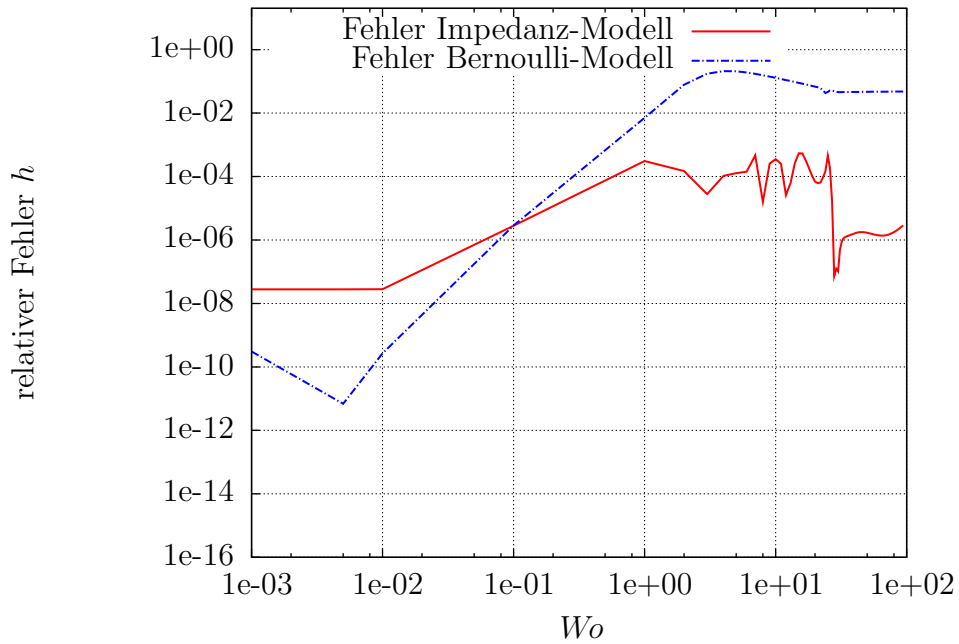


Abbildung 5.3: Relativer Fehler des Bernoulli- und Impedanz-Modells im Vergleich zur analytischen Lösung, bei verschiedenen Womersley-Zahlen.

Der maximale Fehler des Impedanz-Modells liegt in der Größenordnung von $5 \cdot 10^{-4}$ und der des Bernoulli-Modells in der Größenordnung von 10^{-1} . Die Schwankungen bei dem Fehler des Impedanz-Modells wurden nicht näher untersucht.

Für die Fehlerbetrachtung wurden Strömungssituationen mit verschiedenen Reynolds-Zahlen untersucht. Es konnte festgestellt werden, dass der Fehler nicht von der Reynolds-Zahl abhängt. Der Grund hierfür ist, dass alle Modelle die geschwindigkeitsabhängige Reibung auf die gleiche Weise erfassen. Der Fehler ergibt sich somit aus der Trägheit des Fluids, die in den Modellen auf unterschiedliche Art behandelt wird. Daraus folgt, dass die Abweichung der Ergebnisse der Modelle nur von der Womersley-Zahl abhängt.

Durch die Trägheit des oszillierenden Fluids, entsteht zwischen dem maximalen Volumenstrom und der maximalen Druckamplitude ein Phasenversatz. Dies ist eine wichtige Eigenschaft der oszillierenden Strömung. Laut Womersley [32], liegt der Phasenversatz für $Wo \rightarrow 0$ bei 0° , für $Wo \rightarrow \infty$ bei 90° . Die Abbildung 5.4 zeigt den berechneten Phasenversatz der analytischen Lösung und die Ergebnisse der Modellberechnungen. Das Bernoulli- und das Impedanz-Modell wurde an diskreten Punkten ausgewertet und mit der analytischen

Lösung verglichen.

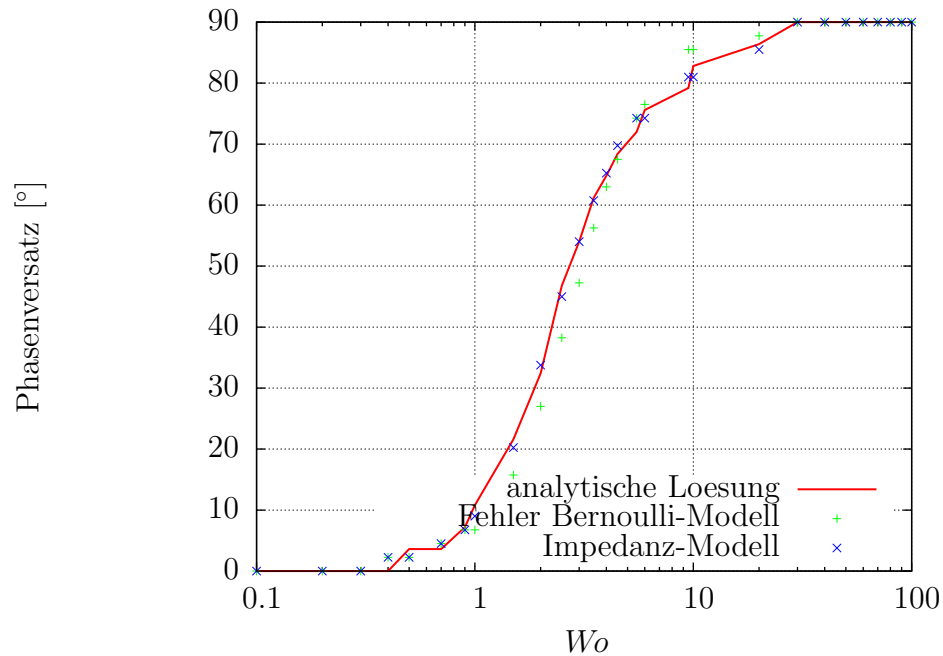


Abbildung 5.4: Berechneter Phasenversatz der verschiedenen Modelle bei unterschiedlichen Womersley-Zahlen.

Abbildung 5.4 zeigt, dass der Verlauf des Phasenversatz der Modelle mit dem der Womersley-Lösung vergleichbar ist. Um die Abweichung deutlich zu machen, wurde der absolute Fehler bestimmt, auf 90° normiert und in Abbildung 5.5 dargestellt.

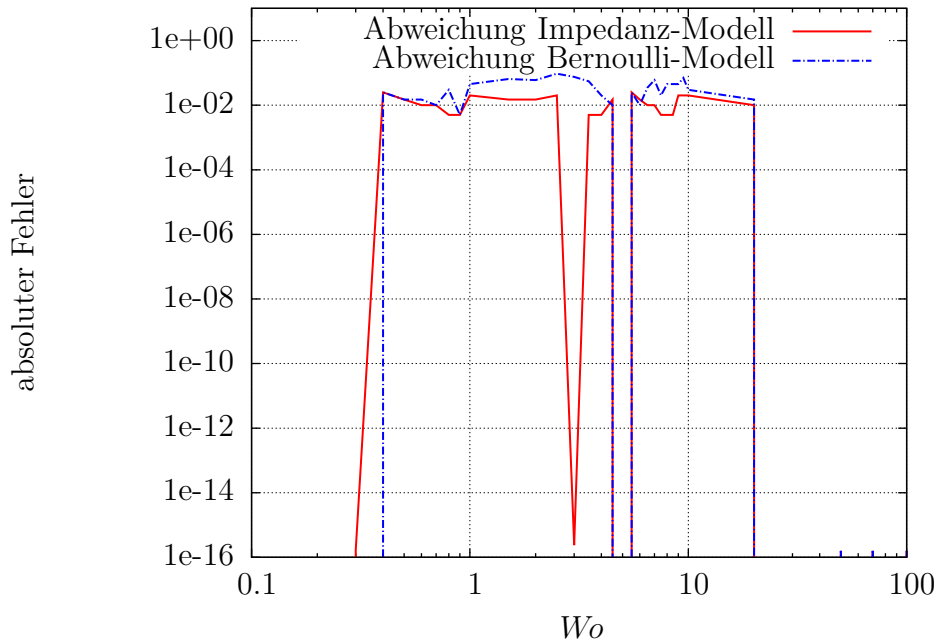


Abbildung 5.5: Absoluter Fehler des Phasenversatzes der Modelle, bezogen auf die analytische Lösung und normiert auf 90° .

Der Fehler tritt nur im Bereich von $0,4 < Wo < 20$ auf. Für kleinere Womersley-Zahlen wird kein Phasenversatz berechnet, oberhalb dieses Bereiches liegt der Phasenversatz bei 90° . Der sprunghafte Anstieg des Fehlers ist durch die Auswertung der Modelle an diskreten Punkten zu erklären. Bei $Wo = 5$ fällt der Fehler abrupt auf null ab. Die Modelle berechnen für $Wo < 5$ einen geringeren Phasenversatz, bei $Wo > 5$ einen größeren. Bei $Wo = 5$ schneiden sich die Verläufe des Phasenversatzes der einzelnen Modelle, wodurch der Fehler auf null abfällt. Innerhalb des Bereiches $0,4 < Wo < 20$ liegt der maximale Fehler des Impedanz-Modells bei $2,5 \cdot 10^{-2}$ und der des Bernoulli-Modells bei $9,5 \cdot 10^{-2}$.

Die Untersuchung der Strömung im einzelnen Bronchus zeigt, dass die geschwindigkeitsabhängige Reibung mit dem Bernoulli-Modell gut wiedergegeben wird. Auch der Einfluss der Trägheit wird erfasst, jedoch entstehen Abweichungen zur analytischen Lösung. In Abschnitt 2.2 wurde eine voll ausgebildete Strömung vorausgesetzt. Die Einlaufeffekte zur Ausbildung der Strömung hängen von Re und Wo ab. Im Bernoulli-Modell sind diese nicht berücksichtigt.

5.3 Untersuchung einer einzelnen Verzweigung

Eine einzelne Verzweigung besteht aus drei Bronchien. Der betrachtete Parameterraum der Untersuchungen umfasst Reynolds-Zahlen zwischen 1 und 20000 und Womersley-Zahlen zwischen 1 und 50. Dabei werden die Kombinationen

- $Re = 1, Wo = 1$
- $Re = 20000, Wo = 1$
- $Re = 1, Wo = 50$
- $Re = 20000, Wo = 50$.

der Parameter untersucht.

Die Parameter Re und Wo beziehen sich auf die Elterngeneration. Bei hohen Reynolds-Zahlen ist die Annahme einer laminaren Strömung nicht erfüllt. Dennoch wird diese hier zu Testzwecken betrachtet um die Einflüsse hoher Geschwindigkeiten auf den Druckverlust im Bronchialbaum zu untersuchen.

Das Bernoulli-Modell wird einmal mit und einmal ohne die Druckverluste an der Verzweigungsstelle ausgewertet. Die Ergebnisse werden mit dem Impedanz-Modell aus Abschnitt 3.5 verglichen. Die Druckwerte sind auf die maximale Amplitude des Bernoulli-Modells mit Verzweigungen normiert, der Volumenstrom auf seine maximale Amplitude. Diese Normierung wird für den gesamten Abschnitt beibehalten. Am Einlass wird ein sinusförmiger Volumenstrom vorgegeben, dessen maximale Geschwindigkeitsamplitude der geforderten Reynolds-Zahl entspricht.

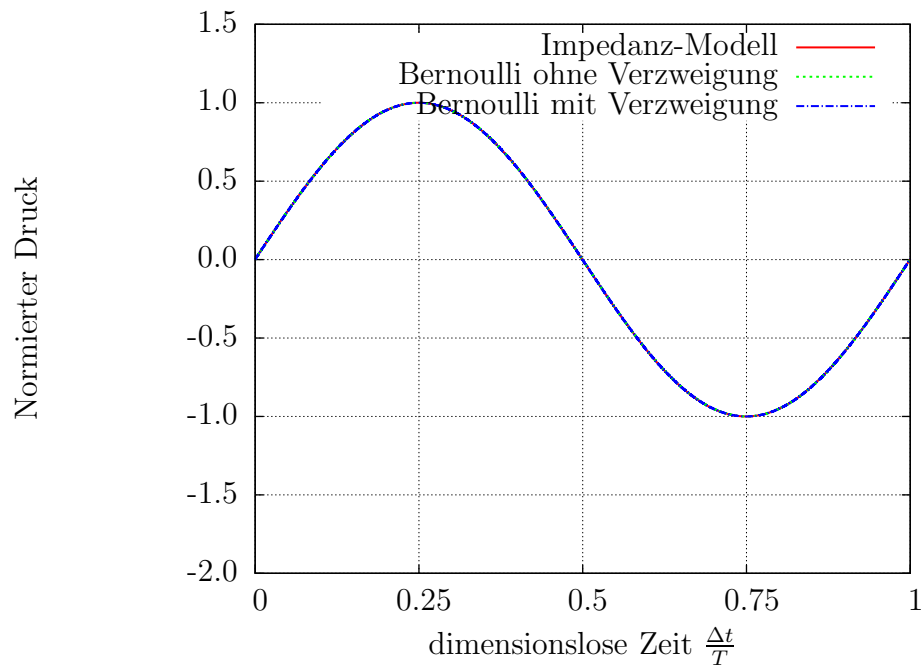


Abbildung 5.6: $Re = 1$, $Wo = 1$.

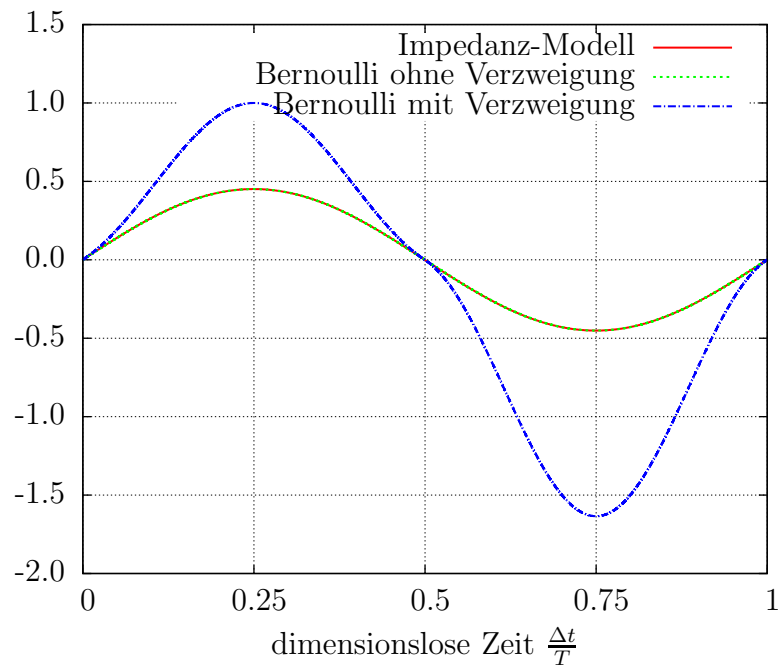


Abbildung 5.7: $Re = 20000$, $Wo = 1$.

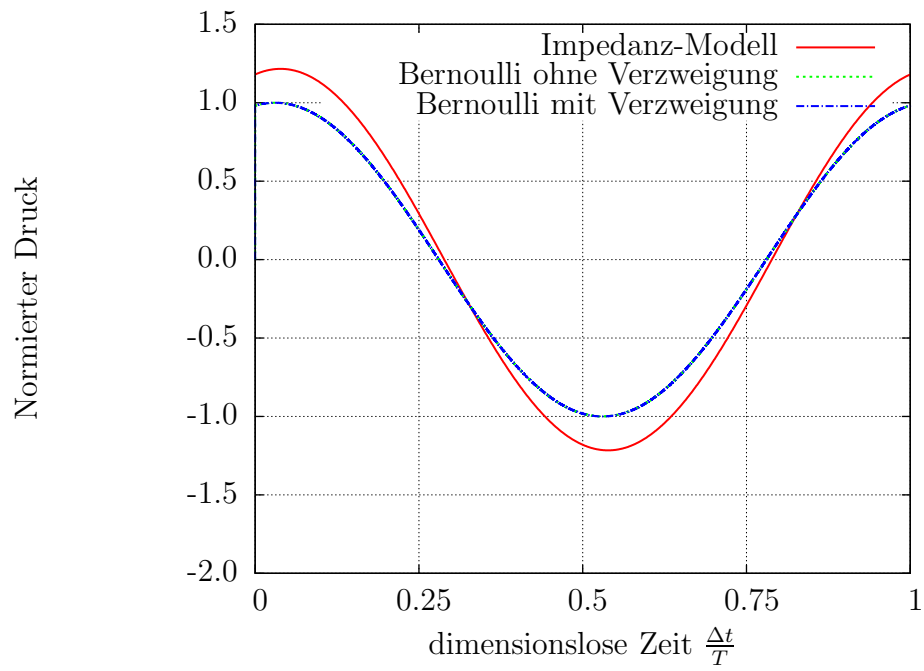


Abbildung 5.8: $Re = 1$, $Wo = 50$.

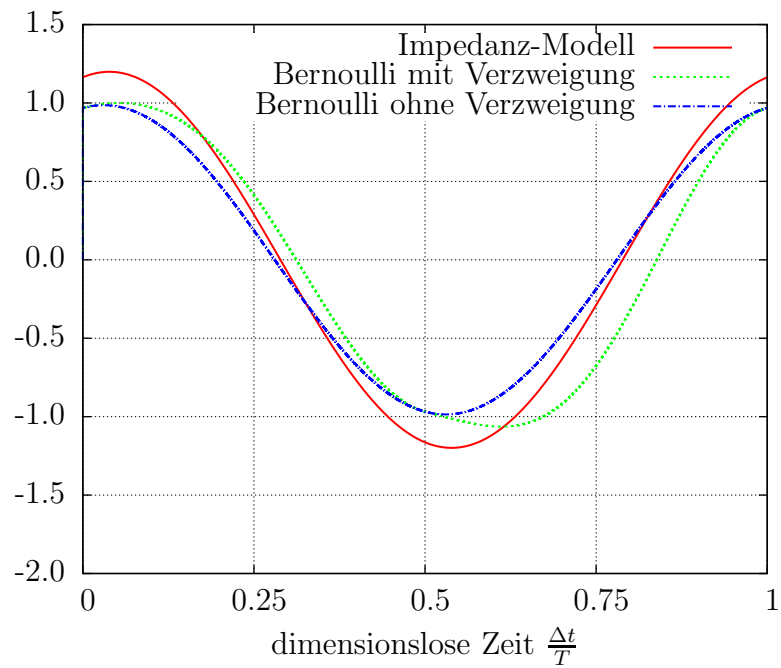


Abbildung 5.9: $Re = 20000$, $Wo = 50$.

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

In Abbildung 5.9 ist der Druckverlauf bei $Re = Wo = 1$ dargestellt. Aufgrund der geringen Reynolds- und Womersley-Zahl haben weder die Druckverluste durch Verzweigungen, noch die durch die Trägheit des Fluids einen signifikanten Einfluss auf den resultierenden Druckverlauf. Die Reibungsverluste werden bei allen Modellen auf die gleiche Weise berücksichtigt, weshalb der berechnete Druckverlauf für alle Modelle identisch ist.

In Abbildung 5.7 ist das Ergebnis bei $Re = 20000$ und $Wo = 1$ dargestellt. Im Vergleich zur vorhergehenden Betrachtung wurde nur die Reynolds-Zahl erhöht. Der berechnete Druckverlauf des Bernoulli-Modells ohne Verzweigungen und der des Impedanz-Modells sind nahezu identisch. Das Ergebnis des Bernoulli-Modells mit Verzweigungen spiegelt jedoch einen starken Einfluss der Verzweigungen wider. Dieser ist bei den Maxima des Volumenstroms, also bei den maximalen Geschwindigkeiten, am Größten.

Abbildung 5.8 zeigt das Ergebnis für $Re = 1$ und $Wo = 50$. Aufgrund der geringen Reynolds-Zahl ist der Einfluss der Verzweigungen gering. Die Ergebnisse der Bernoulli-Modelle mit und ohne Verzweigungsverluste zeigen daher einen ähnlichen Verlauf. Mit der hohen Womersley-Zahl steigt der Einfluss der Trägheit. Da das Impedanz- und das Bernoulli-Modell die Trägheit des oszillierenden Fluids auf unterschiedliche Weise berücksichtigen, weichen auch die berechneten Druckverluste voneinander ab. In Abbildung 5.8 ist ein Phasenversatz im Vergleich zu den Abbildungen 5.6 und 5.7 zu sehen.

Abschließend ist in Abbildung 5.9 das Ergebnis der Berechnung für $Re = 20000$ und $Wo = 20$ dargestellt, bei der sowohl eine hohe Reynolds-Zahl als auch eine hohe Womersley-Zahl vorliegt. Alle Modelle sagen unterschiedliche Druckverläufe vorher. Aufgrund der hohen Reynolds-Zahl unterscheiden sich die Druckverläufe der Bernoulli-Modelle. Die Unterschiede zum Impedanz-Modell gehen dagegen auf den Einfluss der Trägheit zurück. Bei genauerer Betrachtung der beiden Bernoulli-Modelle, fällt auf, dass für hohe Reynolds-Zahlen und hohe Womersley-Zahlen, der Einfluss der Trägheit dominiert.

Um den Einfluss der Verzweigungen und der Trägheit auf den Druckverlust im Bronchialbaum genauer zu untersuchen, sind in Abbildung 5.10 die Druckverluste über dem Volumenstrom dargestellt. Der Volumenstrom ist auf seine maximale Amplitude normiert, wobei der positive Bereich die Inspiration, der negative die Expiration darstellt.

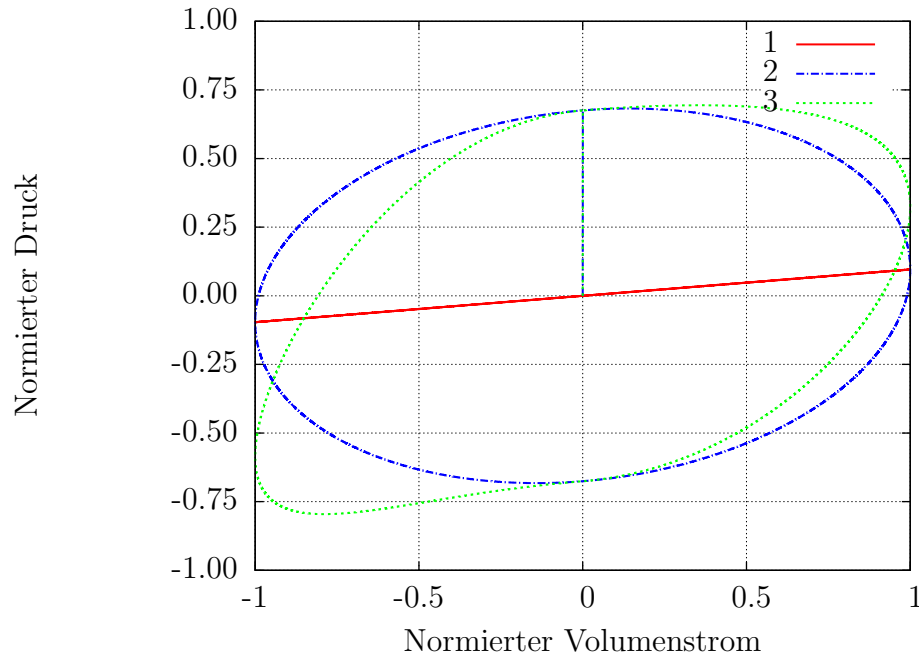


Abbildung 5.10: Druckverluste in Abhängigkeit vom Volumenstrom. Kurve 1: Reibungsverluste, Kurve 2: Druckverluste Reibung und Trägheit, Kurve 3: Summe aller Druckverluste (Reibung, Trägheit und Verzweigungen).

In Abbildung 5.10 stellt die Kurve 1 die Druckverluste durch Reibung dar, welche linear vom Volumenstrom abhängen. Der Einfluss der Reibung ist bei hoher Reynolds-Zahl und hoher Womersley-Zahl gering im Vergleich zu den Verlusten durch Trägheit und Verzweigungen.

Die Kurve 2 zeigt die Summe der Druckverluste durch Reibung und Trägheit in Abhängigkeit vom Volumenstrom. Die Trägheit hängt von der zeitlichen Änderung des Volumenstroms ab. Da ein sinusförmiger Volumenstrom vorgegeben wurde, dessen zeitliche Änderung bei $\dot{V} = 0$ seine Maxima aufweist, ist hier auch der Einfluss der Trägheit maximal. An den Stellen von $\dot{V} = 1$ bzw. $\dot{V} = -1$ ist der Einfluss der Trägheit sehr gering, da hier der Gradient seine Minima aufweist. Es entstehen fast nur Druckverluste durch Wandreibung. In Abbildung 5.8 verläuft der Druck sinusförmig und weist einen Phasenversatz zum Volumenstrom auf.

Die Kurve 3 ergibt sich aus der Summe aller Druckverluste. Da die Druckverluste durch Verzweigungen quadratisch vom Volumenstrom abhängen, haben diese ihre Maxima bei maximalen Volumenströmen. Der Kurvenverlauf in Abbildung 5.10 zeigt, dass bei $\dot{V} = 0$ die Verzweigungen keinen Einfluss haben. Das erklärt die Abweichung des Bernoulli-Modells mit Verzweigungen von der Sinusform in den Abbildungen 5.7 und 5.9. Der

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

Einfluss der verschiedenen Verluste ist deutlich in den Abbildungen 5.6 bis 5.9 zu sehen.

Als nächstes wird ein Anwendungsfall mit den Parametern $Re = 248,17$ und $Wo = 2$ betrachtet. Die mit dem Bernoulli-Modell erzielten Ergebnisse werden mit denen einer Strömungssimulation verglichen, in der die instationären, dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Die Simulation wurde von D. Feldmann am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR) in Göttingen durchgeführt.

Als Randbedingung am Einlass wurde in beiden Simulationen ein Geschwindigkeitsprofil vorgegeben. Im Falle der dreidimensionalen Simulation war dieses nahezu sinusförmig verteilt. Für die eindimensionale Simulation mit dem Bernoulli-Modell wurde eine sinusförmige Geschwindigkeitsverteilung vorgegeben. Die Verläufe der Einströmrandbedingung sind in Abbildung 5.11 für beide Simulationen dargestellt.

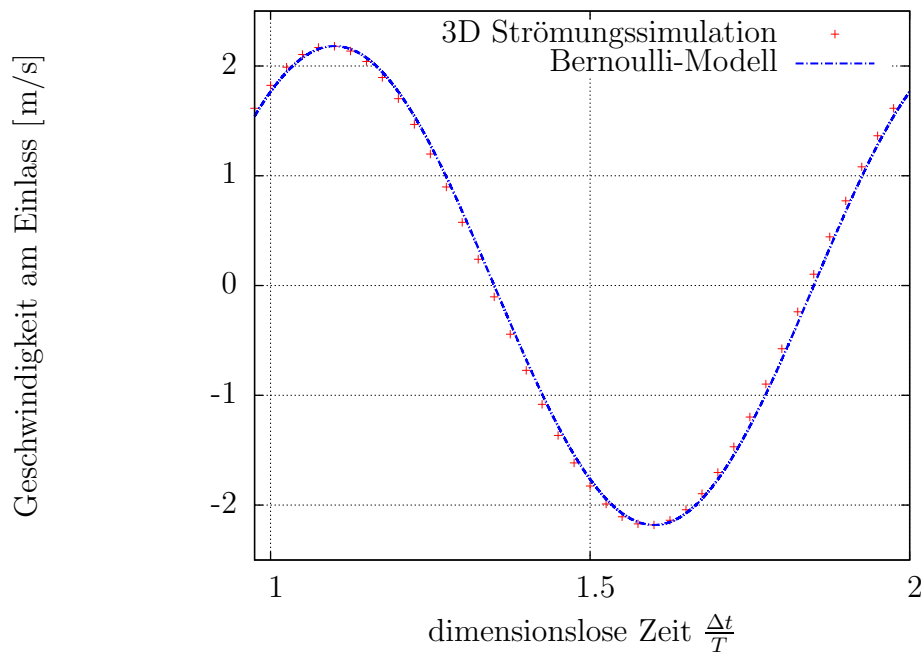


Abbildung 5.11: Vorgebene Geschwindigkeiten einer dreidimensionalen Simulation (Punkte) und als Sinusform für das Bernoulli-Modell (Kurve) am Einlass einer einfachen Verzweigung.

Abbildung 5.11 zeigt eine geringe Abweichung der Geschwindigkeitswerte, die jedoch für die folgende Untersuchung vernachlässigbar ist. Am Auslass wurde in beiden Simulationen eine symmetrische Druckrandbedingung von 0 Pa vorgegeben. Für das Bernoulli-Modell wurde eine dimensionslose Schrittweite $h = \frac{\Delta t}{T} = 6,25 \cdot 10^{-5}$ gewählt.

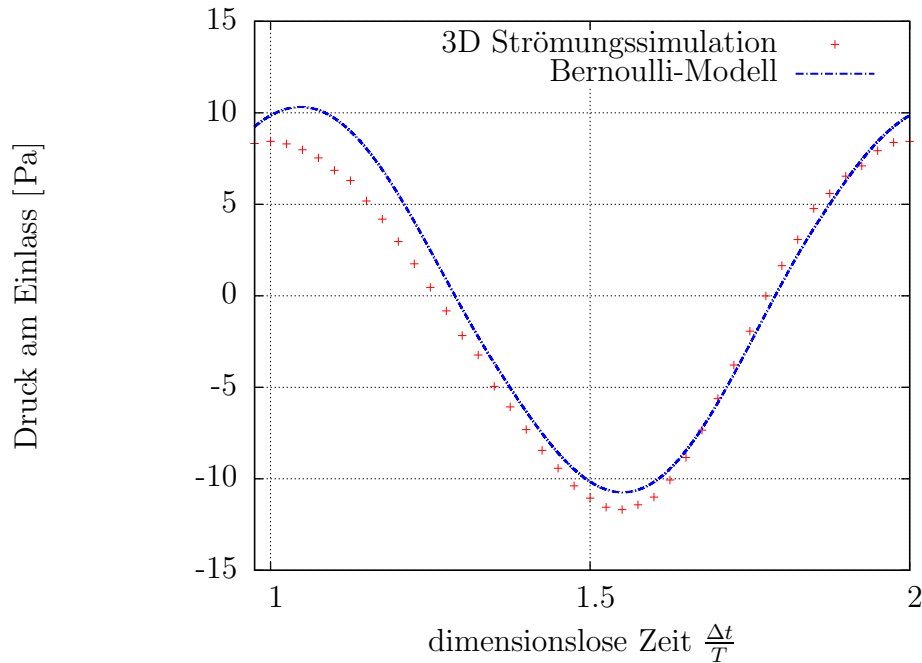


Abbildung 5.12: Berechnete Druckwerte am Einlass einer einfachen Verzweigung mit den Parametern $Re = 248,17$ und $Wo = 2$.

Abbildung 5.12 zeigt eine gute Übereinstimmung der beiden Simulationen am Einlass der einfachen Verzweigung, besonders in dem Bereich mit negativen Geschwindigkeitswerten (Expiration). Im Bereich der positiven Geschwindigkeitswerte ist die Abweichung der beiden Druckverläufe etwas größer. Die Ursache liegt in den Annahmen, auf denen das Bernoulli-Modell basiert. Ausschlaggebend ist die eindimensionale Modellierung. Eine mögliche Verbesserung würde eine Anpassung von Gleichung (3.5) zur Bestimmung des Verlustbeiwertes einer Verzweigung bei der Inspiration darstellen, welche in Abschnitt 3.1.2 erläutert sind. Dazu wären jedoch mehrere Simulationen bei verschiedenen Strömungsparametern notwendig.

Während für die dreidimensionale Strömungssimulation von zwei Schwingungen eine Rechenzeit von ca. einer Woche benötigt wurde, liegt die Rechenzeit des Bernoulli-Modells bei nur 6,8 s. Gerade dieser geringe Rechenzeitbedarf, macht den Vorteil der eindimensionalen Bernoulli-Modellierung deutlich.

Asymmetrische Druckvorgaben

Bisher wurden ausschließlich Ergebnisse bei symmetrischer Vorgabe der Druckrandbedingungen mit einem Druckwert von 0 Pa diskutiert. Bei der Vorgabe von 10 Pa an jedem

Auslass, würde sich die gesamte Druckkurve um 10 Pa nach oben verschieben, ohne das sich der resultierende Kurvenverlauf verändert.

Um die Diskussion der Möglichkeiten des Bernoulli-Modells zu komplettieren, werden im Folgenden asymmetrische Druckrandbedingungen am Auslass vorgegeben. Als Einlass wird Generation sieben, als Auslass Generation acht festgelegt. Am Einlass wird zudem ein sinusförmiger Volumenstrom vorgegeben, während am Auslass für $p_{21} = 1$ Pa und $p_{22} = 2$ Pa statische Werte festgelegt werden. Als Testfall wurde der Beatmungsfalls HFOV 4 ($Re = 865,2$ und $Wo = 2,25$ in Generation sieben) gewählt, der mit einer dimensionslosen Schrittweite $h = \frac{\Delta t}{T} = 6,25 \cdot 10^{-5}$ gelöst wurde. Der resultierende Volumenstrom und die zugehörigen Druckverläufe p_0 und p_1 sind in Abbildung 5.13 dargestellt.

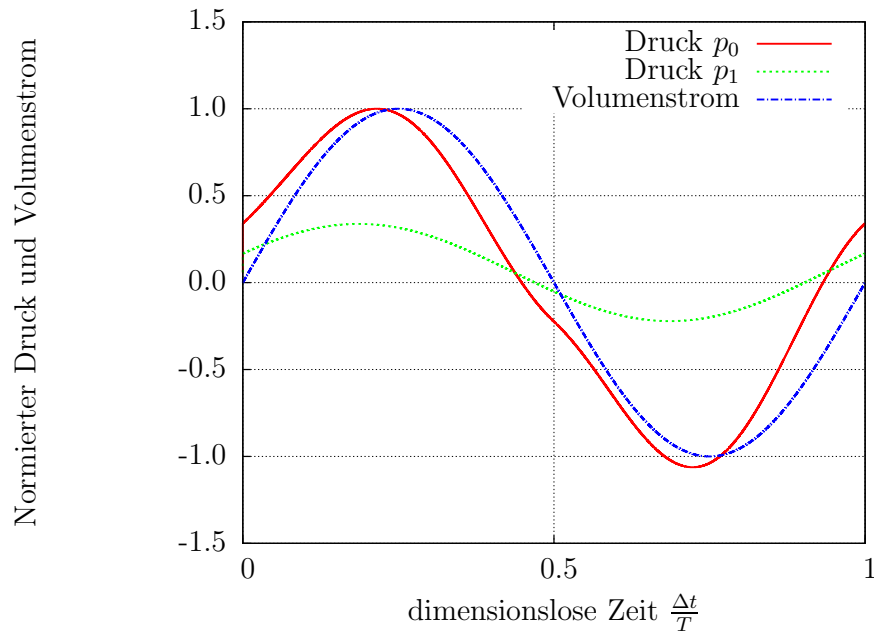


Abbildung 5.13: Sinusförmiger Volumenstrom mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass (p_0) und an der Verzweigungstelle (p_1).

In Abbildung 5.13 ist ein Phasenversatz zwischen maximaler Druckamplitude und der des maximalen Volumenstroms deutlich erkennbar. Der Druck p_1 ergibt sich als Ausgleichsdruck zwischen den Druckwerten am Auslass (p_{21} und p_{22}) und den, in den dazugehörigen Bronchien anfallenden, Druckverlusten durch Reibung und Trägheit. Der Druck p_0 ergibt sich aus dem Druck p_1 und dem Druckverlust, der an der Verzweigung entsteht. Zusätzlich entstehen im oberen Bronchus noch Druckverluste durch Reibung und Trägheit. Die Abweichung von der Sinusform des Druckes p_0 ergibt sich aus dem an Abbildung 5.10 erläuterten Sachverhalt.

Bevor die diskreten Druckwerte weiter untersucht werden, wird zunächst der erste Zeitschritt betrachtet. Bei der Vorgabe eines sinusförmigen Volumenstroms ist dieser im ersten Zeitschritt am Einlass gleich null. Da aber am Auslass verschiedene Druckwerte herrschen, entsteht eine Druckdifferenz, welche die Strömung antreibt. Die im ersten Zeitschritt erzeugte Geschwindigkeitsverteilung in den Bronchien einer einfachen Verzweigung ist in Abbildung 5.14 dargestellt.

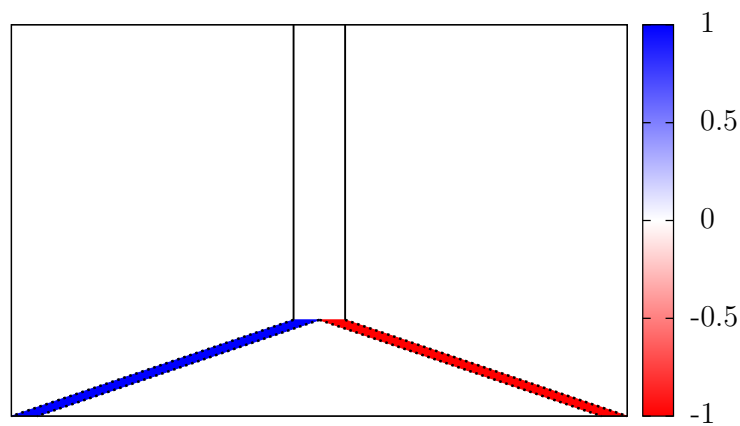


Abbildung 5.14: Verteilung der normierten Geschwindigkeiten in einer einfachen Verzweigung im ersten Zeitschritt, bei der Vorgabe von asymmetrischen Druckwerten.

Man erkennt eine Strömung von p_{22} nach p_{21} , obwohl im oberen Bronchus $\dot{V} = 0$ vorgegeben ist. Diese Querströmung resultiert aus der Differenz zwischen den beiden Druckvorgaben und ähnelt einer Pendelluftströmung.

Volumenabhängige Druckvorgaben

Wie in Abschnitt 3.2.2 erwähnt, werden die Druckrandbedingung dynamisch vorgegeben. Als Randbedingung wird an den Auslass ein Ballon angefügt, mit dem das elastische Verhalten des Alveolarbereiches modelliert werden soll. Für diese Vorgabe wird eine Compliance benötigt, welche das Materialverhalten des Ballons beschreibt. Dieser Wert wird auf $1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{Pa}$ festgelegt. Er wurde aus der dynamischen Druck-Volumen-Beziehung

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

für Lunge und Thorax abgeleitet (vgl. Abbildung 3.7). Um das elastische Verhalten des Alveolarbereiches zu charakterisieren, müssten entsprechende Compliance-Werte ermittelt werden.

Es wird also ein volumenabhängiger Druck vorgegeben, der jedoch in jedem Zeitschritt symmetrisch ist. Der Verlauf der diskreten Druckwerte ist in Abbildung 5.15 zu sehen.

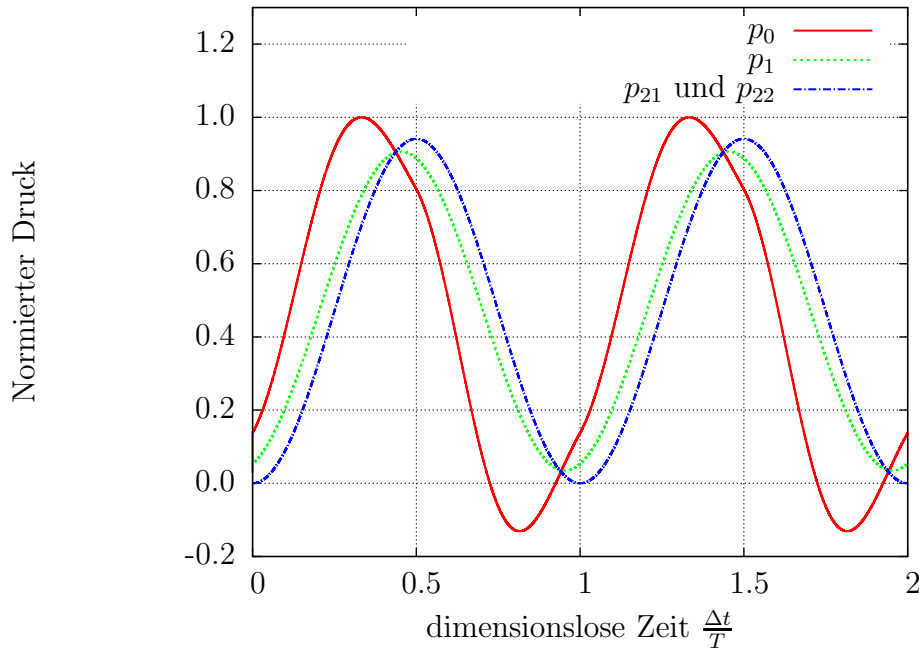


Abbildung 5.15: Verlauf der diskreten Druckwerte einer einfachen Verzweigung, dargestellt über zwei Perioden.

Aufgrund der symmetrisch vorgegebenen Druckrandbedingung, halbiert sich der eingehende Volumenstrom an der Verzweigungsstelle. In Abbildung 5.15 nehmen die Druckwerte p_{21} und p_{22} stets positive Werte an. Der Verlauf entspricht qualitativ dem des eingeflossenen Volumens (der Verlauf des Volumens eines sinusförmigen Volumenstroms ist in Abbildung 4.3 dargestellt).

Um die Untersuchung der Strömung in einer einzelnen Verzweigung abzuschließen, werden nun an den Auslässen verschiedene Compliance-Werte vorgegeben. Am Auslass von p_{21} wird $Comp = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{Pa}$, am Auslass von p_{22} wird $Comp = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{Pa}$ gesetzt. Die Verläufe der diskreten Druckwerte sind in Abbildung 5.16 und die zugehörigen Volumenströme in Abbildung 5.17 über jeweils zwei Perioden dargestellt.

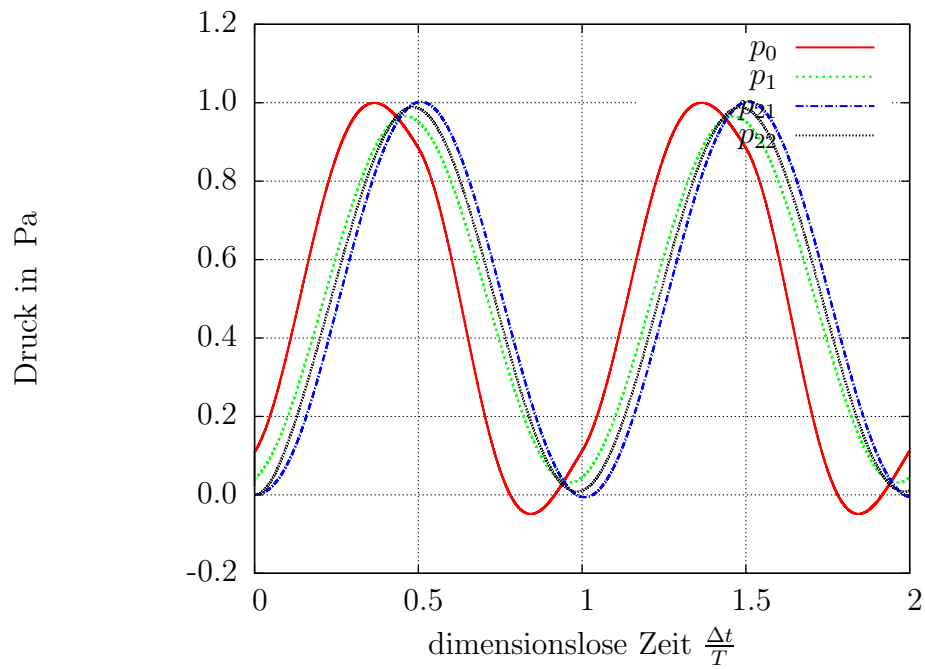


Abbildung 5.16: Verlauf der diskreten Druckwerte einer einfachen Verzweigung für die ersten zwei Perioden.

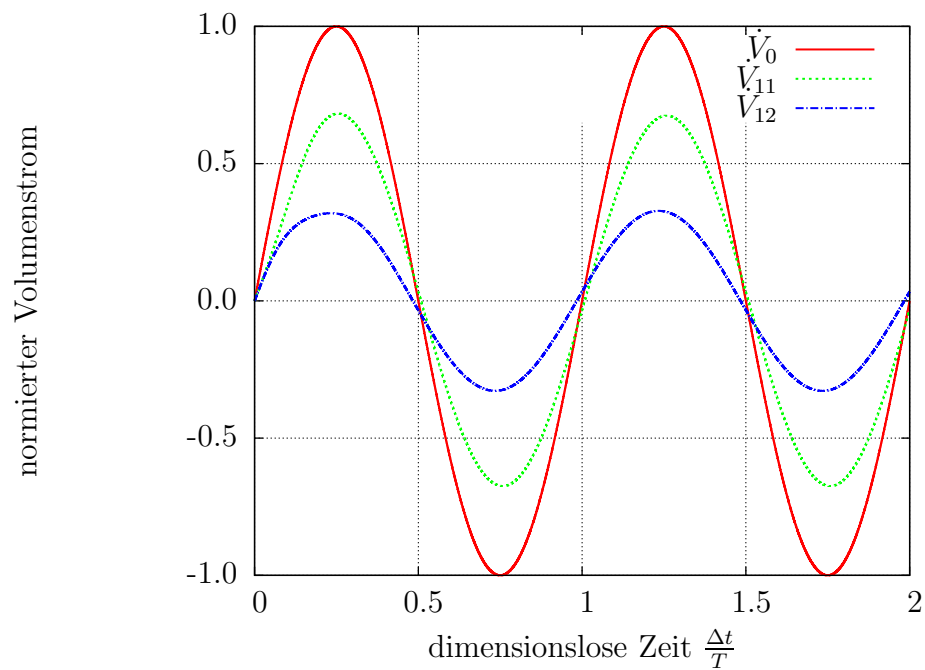


Abbildung 5.17: Verlauf der Volumenströme einer einfachen Verzweigung für die ersten zwei Perioden.

Abbildung 5.17 zeigt, dass die Aufteilung der Volumenströme bei verschiedenen Compliance-Werten an den Auslässen nicht mehr symmetrisch ist. Dieser Effekt tritt auch in pathologischen Lungenarealen auf. Über die volumenabhängige Druckrandbedingung können daher größere Compliance-Werte vorgegeben und somit ein pathologisches Lungenverhalten modelliert werden.

5.4 Untersuchung von Bronchialbäumen

In Abschnitt 2.1.2 wurde bereits erwähnt, dass in der Lunge eine funktionale Unterscheidung zwischen konvektivem und diffusivem Transport vorgenommen werden kann. Um die angesprochene Trennung am Bernoulli-Modell zu überprüfen, wird eine Strömungssituation eingestellt, für die am Einlass die charakteristischen Werte $Re = 21875,3$ und $Wo = 19,36$ gelten. Diese entsprechen dem Beatmungsfall HFOV 3 aus Tabelle 2.1. Die Strömung im Bronchialbaum wird einmal von Generation null bis 18 (Rechnung 1) und einmal von Generation null bis 23 (Rechnung 2) untersucht. An allen Auslässen wurde ein Druckwert von 0 Pa vorgegeben. Der resultierende Druckverlauf ist in Abbildung 5.18 dargestellt.

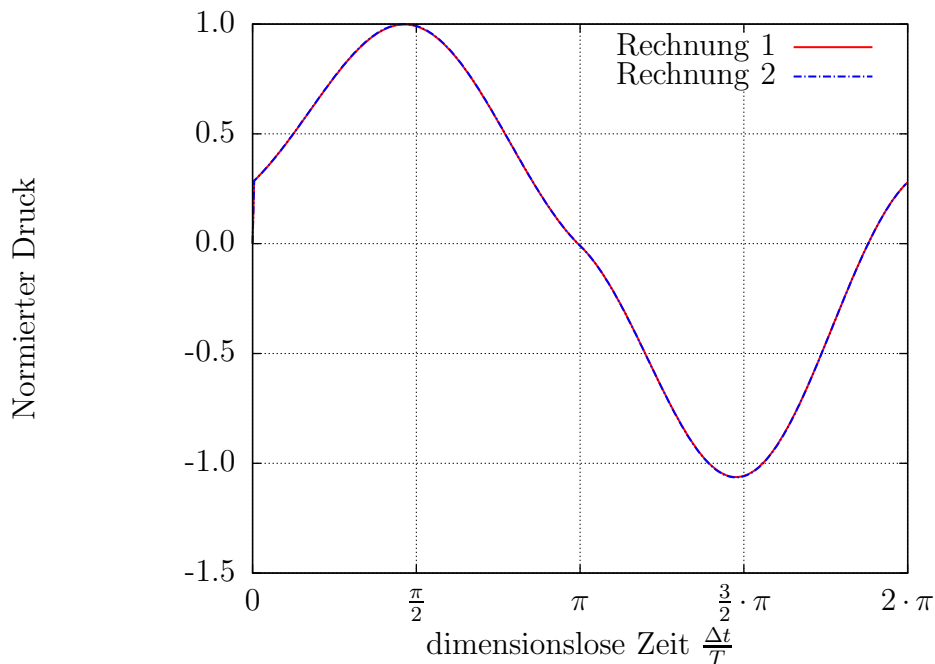


Abbildung 5.18: Druckverlauf bei unterschiedlicher Baumtiefe mit den charakteristischen Parametern $Re = 21875,3$ und $Wo = 19,36$ am Einlass, normiert auf die maximale Druckamplitude der Rechnung 2.

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

Der Vergleich in Abbildung 5.18 verdeutlicht die gute Übereinstimmung der beiden Ergebnisse. Die maximale Druckamplitude für Rechnung 1 beträgt 36,96 Pa und für Rechnung 2 bei 37,02 Pa. Die Druckverläufe in Abbildung 5.18 sind auf die maximale Amplitude von Rechnung 2 normiert. Die Abweichung der maximalen Druckamplituden von $1,6 \cdot 10^{-3}$ zeigt, dass die letzten Generationen eines Bronchialbaumes keinen wesentlichen Einfluss auf die Lösung ausüben, da der konvektive Transport vernachlässigbar ist. Somit reduziert sich die Anzahl der Unbekannten im Gleichungssystem, was sich auf den Speicherplatz und die Rechenzeit auswirkt. Diese werden in Abschnitt 5.5 erläutert.

Um die Berechnung von Druckverlusten in Bronchialbäumen genauer zu untersuchen, wird die Druckrandbedingung von Rechnung 1 variiert. Bei einer Generationstiefe von $GT = 18$ existieren 262144 Auslässe. In Rechnung 1 wurde an allen Auslässen ein Druckwert von 0 Pa in jedem Zeitschritt vorgegeben. Die Druckrandbedingung wird dahingehend verändert, dass an jedem Auslass eine symmetrische Compliance ($Comp = 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$) vorgegeben wird. Dieser Fall wird als Rechnung 1a bezeichnet. In einem zweiten Fall wird die Druckrandbedingung so geändert, dass zwei verschiedene Compliance-Werte vorgegeben werden. Diese sind symmetrisch auf die linke und rechte Seite des Bronchialbaumes verteilt. Die beiden Bereiche sind in Abbildung 5.19 dargestellt.

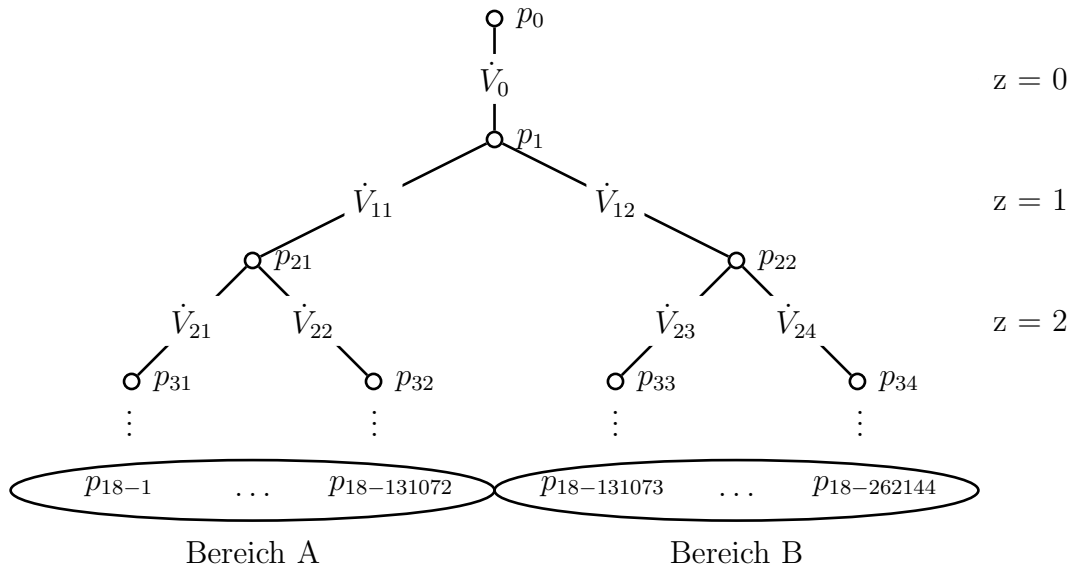


Abbildung 5.19: Symmetrisch verteilte Bereiche des Bronchialbaumes für die Vorgabe von Compliance-Werten, Bereich A für die linke Seite, Bereich B für die rechte.

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

Für den Bereich A wird eine Compliance mit dem Wert $Comp = 10^{-5} \text{ m}^3/\text{Pa}$ und für den Bereich B eine Compliance mit dem Wert $Comp = 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$ vorgegeben. Dieser Fall wird als Rechnung 1b bezeichnet. Im dritten Fall (Rechnung 1c) wird eine zufällige Verteilung der Compliance-Werte an den Auslässen ($10^{-5} \text{ m}^3/\text{Pa} \leq Comp \leq 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$) betrachtet. Der Druckverlauf am Einlass ist für alle drei Rechnungen in Abbildung 5.20 dargestellt, wobei die Druckwerte auf die maximale Amplitude von Rechnung 1a normiert sind.

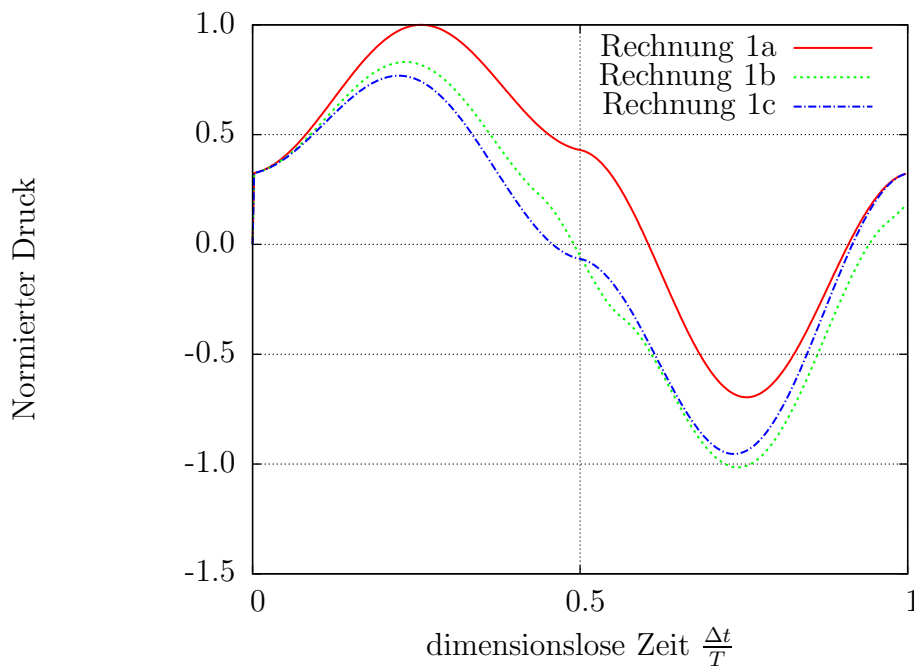


Abbildung 5.20: Verlauf des Druckes am Einlass eines Bronchialbaumes über 19 Generationen bei der Vorgabe verschiedener Druckrandbedingungen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1a.

In Abbildung 5.20 sieht man die resultierenden Druckverläufe am Einlass des Bronchialbaumes bei der Vorgabe verschiedener Druckrandbedingungen. Die maximale Druckamplitude beträgt $1327,1 \text{ Pa}$. Der Druckanstieg durch die Vorgabe von Compliance-Werten als Randbedingung am Auslass hat einen signifikanten Einfluss auf den Druckverlauf. Während der Nulldurchgang des Druckverlaufs in Abbildung 5.18 bei $\frac{\Delta t}{T} = 0,5$ liegt, verschiebt sich dieser in Abbildung 5.20 nach rechts. Die Druckamplitude während der Inspiration ist in Abbildung 5.18 etwas geringer als die der Expiration. In Abbildung 5.20 ist diese bei der Expiration wesentlich höher. Das bedeutet, dass die Druckkurve nach oben verschoben wird. Im Gegensatz zu statischen Randbedingungen, bei denen die Druck-

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

randbedingung über die gesamte Periode konstant ist, verändert sich auch der Verlauf der Kurve. Bei größeren Compliance-Werten würde über die gesamte Periode ein positiver Druck vorliegen. Im Bronchialbaum würde somit auch bei der Inspiration ein Überdruck entstehen, was ein pathologisches Lungenverhalten aufzeigt.

Auch die Art der Vorgabe der Compliance-Werte hat entscheidenden Einfluss auf den Druckverlauf. Bei der Rechnung 1b liegt der Mittelwert bei $Comp = 5,5 \cdot 10^{-5}$. Der Mittelwert der zufällig verteilten Compliance-Werte für die Rechnung 1c beträgt $Comp = 5,53 \cdot 10^{-5}$. Trotz nahezu identischer Mittelwerte unterscheiden sich die aus den beiden Rechnungen resultierenden Druckverläufe deutlich.

Der Druckanstieg durch die volumenabhängige Druckrandbedingung dominiert gegenüber den Druckverlusten durch Reibung, Trägheit und Verzweigungen. Während die maximale Druckamplitude der Rechnung 1 bei 37,02 Pa liegt, erhöht sich diese bei Rechnung 1a auf 1327,1 Pa. In Abbildung 5.21 werden daher die Werte der Druckrandbedingung in jedem Zeitschritt für die Rechnung 1a betrachtet und auf deren maximale Druckamplitude normiert.

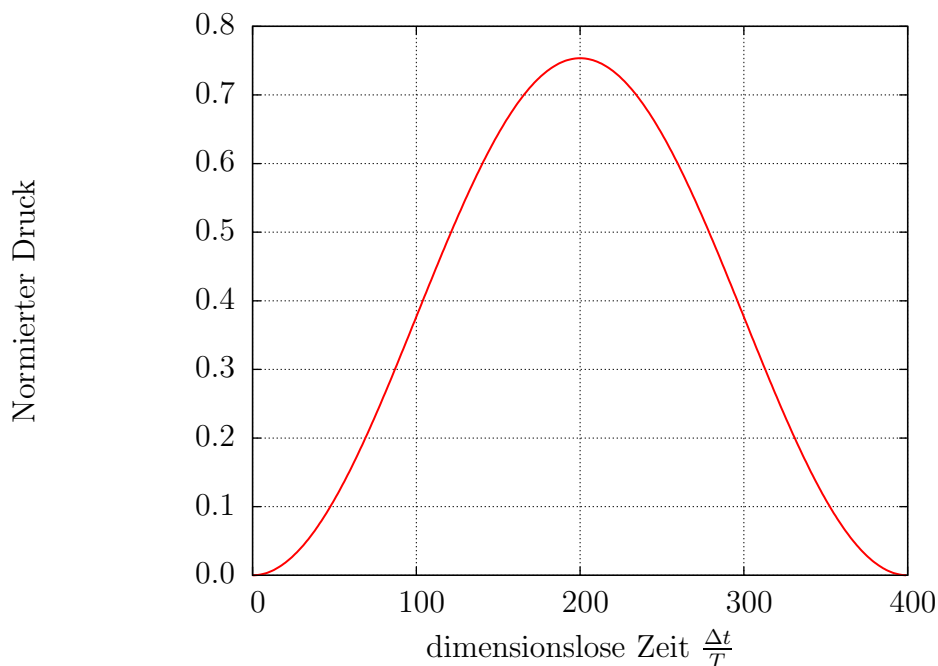


Abbildung 5.21: Verlauf der Druckwerte für die Randbedingung für die Rechnung 1a in jedem Zeitschritt, normiert auf deren maximale Druckamplitude.

In Abschnitt 5.3 wurde bereits angesprochen, dass die Vorgabe eines Druckwertes am Auslass einen Einfluss auf die Druckverteilung im Baum hat. Würden man einen kon-

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

stanten Wert von 10 Pa über die gesamte Periode vorgegeben, würde sich die Druckkurve auch um 10 Pa nach oben verschieben. Bei der Rechnung 1a (welche einen symmetrischen Fall darstellt), gilt bei $\frac{\Delta t}{T} = 0,5$ eine Druckvorgabe von ca. 1000 Pa. Darüber hinaus ändert sich der vorgegebene Druckwert in jedem Zeitschritt, sodass sich auch der Verlauf der Druckkurve ändert. Das erklärt den starken Einfluss der Compliance-Werte auf den Druckverlauf.

Als nächstes wird die Verteilung der Werte für Druck und Volumenstrom im Baum betrachtet. Dafür werden die Ergebnisse Rechnung 1b herangezogen.

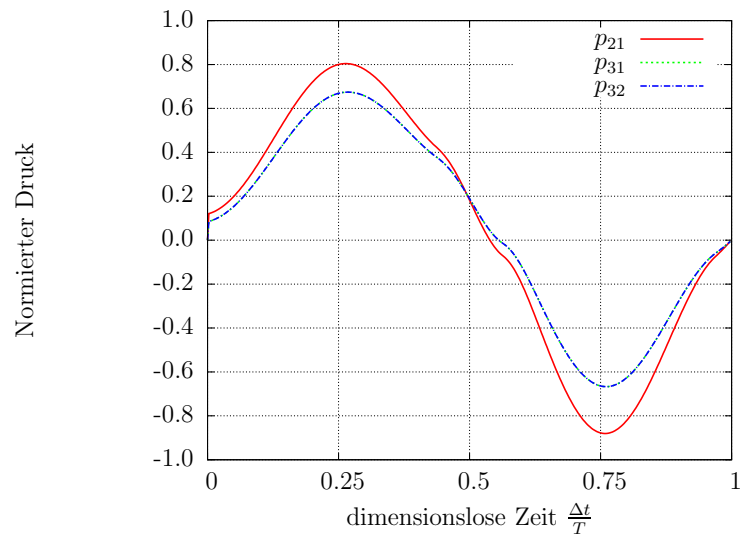


Abbildung 5.22: Verlauf der Druckwerte in Generation zwei eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1b (linke Seite).

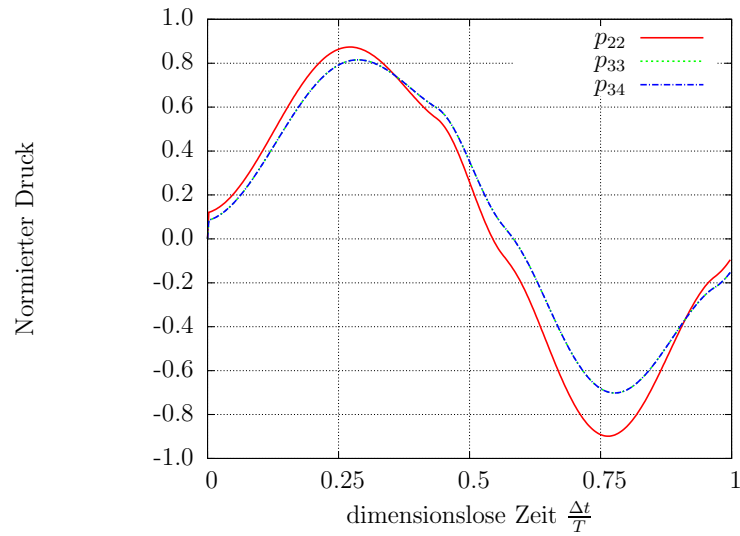


Abbildung 5.23: Verlauf der Druckwerte in Generation zwei eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1b (rechte Seite).

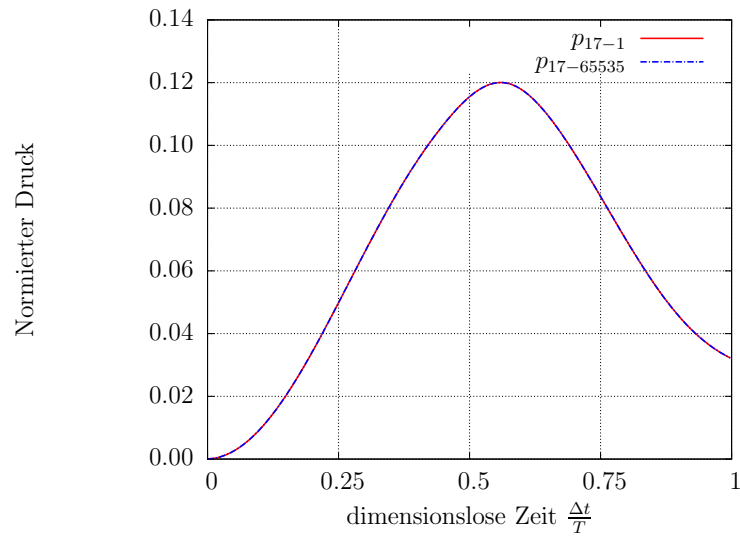


Abbildung 5.24: Verlauf der Druckwerte in Generation 17 eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1b (linke Seite).

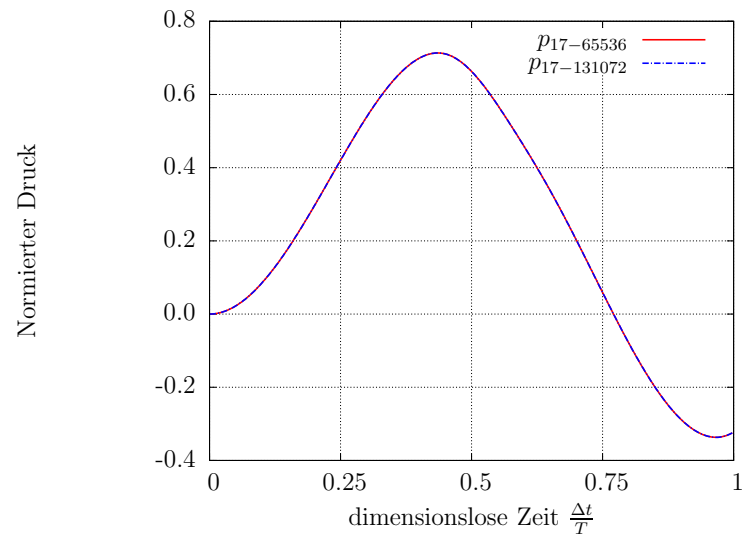


Abbildung 5.25: Verlauf der Druckwerte in Generation 17 eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Druckamplitude von Rechnung 1b (rechte Seite).

In den Abbildungen 5.22 und 5.24 sind die Druckwerte in Generation eins dargestellt. Zum Vergleich zeigen die Abbildungen 5.23 und 5.25 die Druckwerte in Generation 17. Die Auswertung hat ergeben, dass alle Druckwerte in den Bereichen A und B in jeder Generation identisch sind.

Auch die in den Abbildungen 5.26 bis 5.29 dargestellten Volumenströme verhalten sich ähnlich.

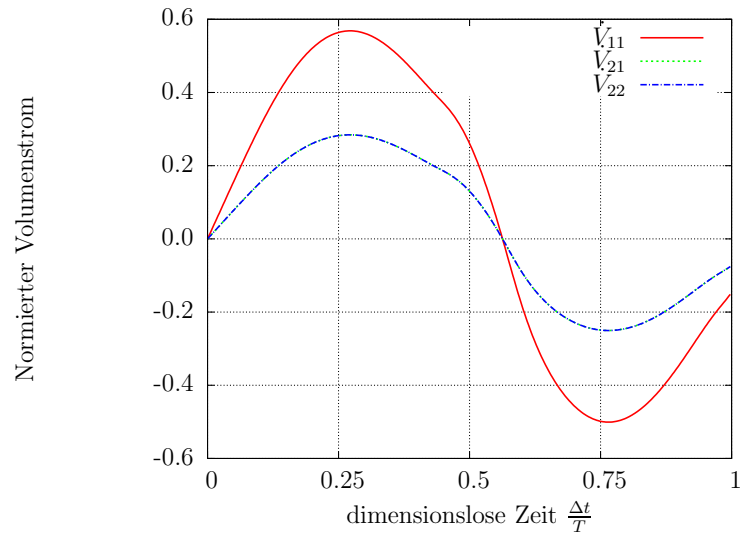


Abbildung 5.26: Verlauf der Volumenströme in Generation eins und zwei eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms (linke Seite).

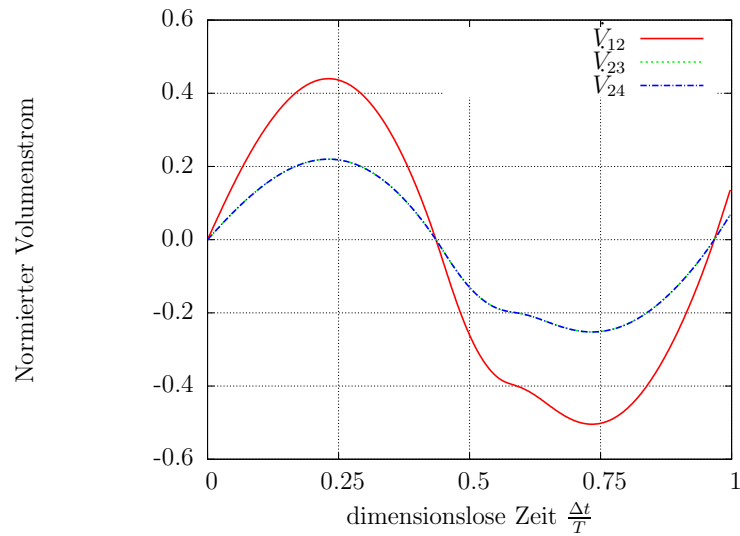


Abbildung 5.27: Verlauf der Volumenströme in Generation eins und zwei eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms (rechte Seite).

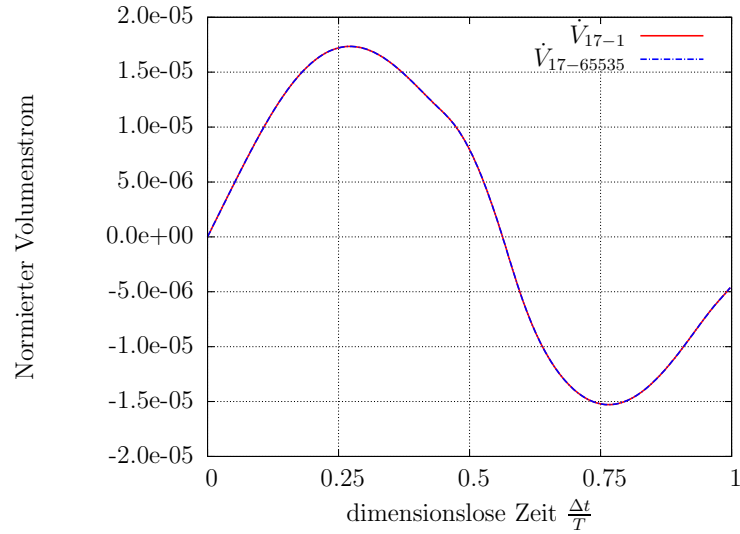


Abbildung 5.28: Verlauf der Volumenströme in Generation 17 eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms (linke Seite).

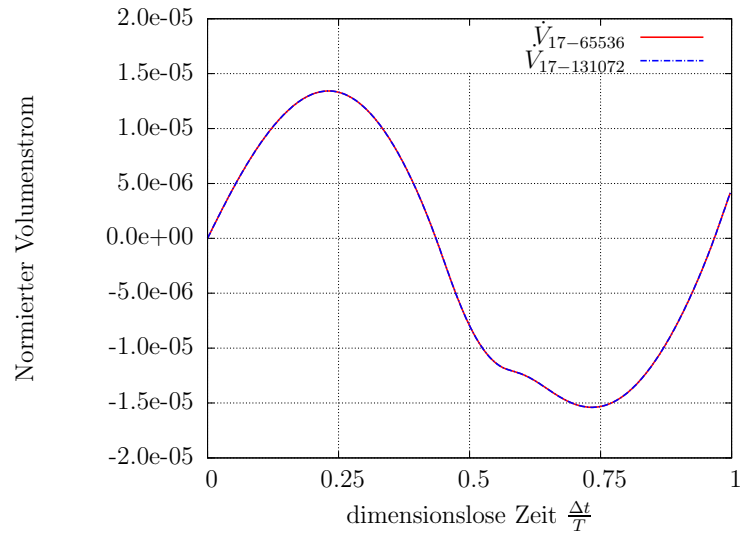


Abbildung 5.29: Verlauf der Volumenströme in Generation 17 eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms (rechte Seite).

Die Werte der Volumenströme sind für die Bereiche A und B in jeder Generation ebenfalls identisch. Wenn an den Auslässen zwei verschiedene Compliance-Werte symmetrisch vorgegeben werden, liegt auf jeder Seite eine vollständig symmetrische Strömung vor. Demzufolge verhalten sich die Bereiche A und B wie Bronchialbäume mit symmetrischen

Randbedingungen.

Zusätzlich entsteht eine Schwingung der Volumenströme, bis nach ca. drei Perioden ein eingeschwungener Zustand erreicht ist. Das Schwingverhalten ist in Abbildung 5.30 beispielhaft für einen Volumenstrom in Generation zehn und in Abbildung 5.31 für den zugehörigen Druckverlauf gezeigt.

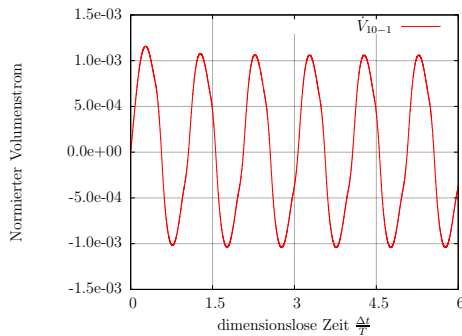


Abbildung 5.30: Verlauf eines Volumenstroms in Generation zehn eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des eingehenden Volumenstroms.

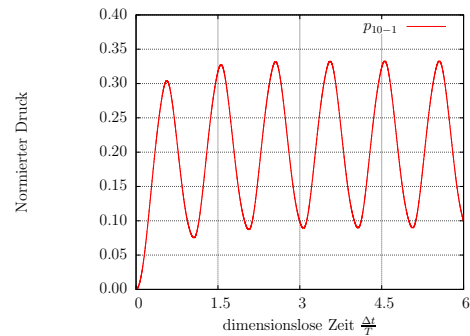


Abbildung 5.31: Verlauf eines Druckwertes in Generation zehn eines Bronchialbaumes über 19 Generationen, normiert auf die maximale Amplitude des Druckes am Einlass.

5.5 Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf

Von besonderer Bedeutung ist der Rechenzeit- und der Speicherplatzbedarf des entwickelten Programms, der im folgenden Abschnitt diskutiert wird. Dazu wurde ein Rechner benutzt, welcher über einen Prozessor mit einer Taktfrequenz von 2,5 GHz verfügt. Der Rechner ist mit 8 GB Arbeitsspeicher ausgestattet.

Als erstes werden die in Abschnitt 4.2 beschriebenen Algorithmen zur Aufbereitung der Daten hinsichtlich ihres Rechenzeit- und ihres Speicherplatzbedarfs untersucht. Die drei Algorithmen bestehen aus:

- Generierung einer $n \times n$ Matrix
- Generierung eines $3 \times m$ Feldes und
- Generierung von Listen.

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

Bei der Reservierung des Speichers für ein Feld werden pro Eintrag acht Byte benötigt. Das entspricht einer Fließkommazahl mit 15 Stellen. Um die Algorithmen zu vergleichen wurde der theoretisch benötigte Speicherplatz berechnet. Algorithmus a) reserviert also $n \cdot n$ Einträge und Algorithmus b) $3 \cdot m$ Einträge. Da bei Algorithmus c) der Spaltenindex nicht explizit benötigt wird, werden hier nur $2 \cdot m$ Werte gespeichert. Die Tabelle 5.5 zeigt eine Übersicht des benötigten Speicherplatzes für die verschiedenen Algorithmen, wobei SP der benötigte Speicherplatz ist.

Tabelle 5.1: Speicherplatzbedarf der Algorithmen

| GT | n | m | SP a) | SP b) | SP c) |
|----|-------------------|-------------------|----------|-----------|-----------|
| 4 | $2.20 \cdot 10^1$ | $5.60 \cdot 10^1$ | 3.78 kB | 1.31 kB | 0.88 kB |
| 6 | $9.40 \cdot 10^1$ | $2.48 \cdot 10^2$ | 69.03 kB | 5.81 kB | 3.88 kB |
| 11 | $3.07 \cdot 10^3$ | $8.18 \cdot 10^3$ | 71.91 MB | 191.81 kB | 127.88 kB |
| 14 | $2.46 \cdot 10^4$ | $6.55 \cdot 10^4$ | 4.5 GB | 575.95 kB | 383.96 kB |
| 15 | $4.92 \cdot 10^4$ | $1.31 \cdot 10^5$ | 18 GB | 1.12 MB | 767.96 kB |
| 16 | $9.83 \cdot 10^4$ | $2.62 \cdot 10^5$ | 72 GB | 6 MB | 4 MB |
| 20 | $3.15 \cdot 10^6$ | $8.39 \cdot 10^6$ | 192 TB | 192 MB | 128 MB |
| 24 | $2.52 \cdot 10^7$ | $6.71 \cdot 10^7$ | 4608 TB | 1.5 GB | 1 GB |

Aus Tabelle 5.5 wird deutlich, dass für die Verarbeitung der Daten eine effiziente Speicherverwaltung nötig ist. Bei einer Generationstiefe von 24, würde eine $n \times n$ Matrix mit ca. $6.33 \cdot 10^{14}$ Einträgen erzeugt, davon sind nur ca. $10^{-5}\%$ Elemente ungleich Null (vgl. Abbildung 4.2). Das verdeutlicht, dass es schwierig ist, eine Matrix für 15 Generationen auf einem herkömmlichen Rechner zu speichern, da hierfür 18 GB freier Arbeitsspeicher nötig ist.

Des Weiteren wird der Rechenzeitbedarf des Algorithmus (RZ) analysiert. Dazu wird im Programm ausschließlich die Zeit gemessen, die für die Abarbeitung der Algorithmen a), b) und c) nötig ist. Das Ergebnis zeigt die Tabelle 5.5.

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

Tabelle 5.2: Rechenzeitbedarf der Algorithmen

| GT | n | m | RZ a) in s | RZ b) in s | RZ c) in s |
|----|-------------------|-------------------|------------|------------|------------|
| 10 | $1,50 \cdot 10^3$ | $4,01 \cdot 10^3$ | 0.21 | 0.1 | 0 |
| 11 | $3,07 \cdot 10^3$ | $8,18 \cdot 10^3$ | 0.85 | 0.4 | 0 |
| 14 | $2,46 \cdot 10^4$ | $6,55 \cdot 10^4$ | 190 | 33.8 | 0.01 |
| 15 | $4,92 \cdot 10^4$ | $1,31 \cdot 10^5$ | xxx | 149 | 0.01 |
| 16 | $9,83 \cdot 10^4$ | $2,62 \cdot 10^5$ | xxx | 576 | 0.03 |
| 17 | $1,97 \cdot 10^5$ | $5,24 \cdot 10^5$ | xxx | 2220 | 0.04 |
| 21 | $3,15 \cdot 10^6$ | $8,39 \cdot 10^6$ | xxx | xxx | 0.65 |
| 24 | $2,52 \cdot 10^7$ | $6,71 \cdot 10^7$ | xxx | >200 h | 5.28 |

Auch die benötigten Rechenzeiten belegen, dass eine Kompaktspeicherung der Daten sehr wichtig ist. Bei Algorithmus a) zeigen sich im Vergleich zu den Algorithmen b) und c) hohe Rechenzeiten. Bei einem Branchialbaum mit einer Generationstiefe von 15, konnten keine Rechenzeiten ermittelt werden, da nicht genug Speicherplatz für die Erzeugung der Felder vorhanden war. Mit Erhöhung der Generationstiefe um eins, steigen die Rechenzeiten von Algorithmus b) um ca. das Vierfache. Ein Test zur Verarbeitung von 24 Generationen ($2.52 \cdot 10^{07}$ Unbekannte) wurde nach 200 h abgebrochen, da eine Abschätzung des benötigten Rechenzeitbedarfs einen Wert von 10000 h ergab. Der selbst entworfene Listenalgorithmus c) erweist sich hinsichtlich des benötigten Speicherplatz- und Rechenzeitbedarfs als äußerst effizient. Die Angabe 0 s in den ersten beiden Spalten bedeutet, dass die Ergebnisse der Zeitmessung im Bereich der Rechengenauigkeit liegen.

Da zur Lösung der Gleichung (4.6) ein Open Source Gleichungslöser benutzt wird, werden als nächstes dessen Rechenzeiten bestimmt. Da die Rechenzeiten des Löfers bei identischen Rechnungen unterschiedliche Werte aufweisen, wurden mehrere Rechnungen durchgeführt. Tabelle 5.5 enthält Richtwerte für die Rechenzeit des UMFPACK-Löfers bei verschiedenen Generationstiefen.

Tabelle 5.3: Rechenzeit des UMFPACK-Lösers

| GT | n | RZ in s |
|----|-------------------|-------------------------|
| 14 | $2,46 \cdot 10^4$ | ca. $8,8 \cdot 10^{-2}$ |
| 15 | $4,92 \cdot 10^4$ | ca. $1,5 \cdot 10^{-1}$ |
| 16 | $9,83 \cdot 10^4$ | ca. $3,0 \cdot 10^{-1}$ |
| 20 | $1,57 \cdot 10^6$ | ca. $1,6 \cdot 10^1$ |
| 21 | $3,15 \cdot 10^6$ | ca. $1,0 \cdot 10^2$ |
| 22 | $6,29 \cdot 10^6$ | ca. $6,0 \cdot 10^2$ |

Tabelle 5.5 enthält Richtwerte für die benötigte Rechenzeit des Lösers ab einer Generationstiefe von 14. Für $GT < 14$ wurde keine Rechenzeitbestimmung durchgeführt, da die Werte sehr klein werden und daher nicht mehr ausschlaggebend sind. Mit dem UMFPACK-Löser sind nur Berechnungen bis zu einer Generationstiefe von 22 möglich, da dieser bei einer $GT > 22$ einen Speicherzugriffsfehler meldet. Symmetrische Berechnungen können jedoch bis $GT = 24$ durchgeführt werden, da hier die Anfangswerte bereits die Lösung darstellen und keine Iteration nötig ist. Der UMFPACK-Löser wird daher bei symmetrischen Berechnungen nicht benötigt (vgl. Abschnitt 4).

Als nächstes wird der Rechenzeitbedarf des gesamten Modells bestimmt. Da das Bernoulli-Modell später als Randbedingung für dreidimensionale Strömungssimulationen genutzt werden soll, wird die zur Berechnung eines Zeitschrittes notwendige Rechenzeit bestimmt. Tabelle 5.5 fasst die benötigten Rechenzeiten einer symmetrischen und einer asymmetrischen Problemstellung zusammen. Bei der Berechnung der asymmetrischen Problemstellungen hängt die Rechenzeit zusätzlich von der Anzahl der Iterationen für das Erreichen einer konvergierten Lösung ab. In Tabelle 5.5 sind daher neben den Rechenzeiten die Anzahl der durchgeführten Iterationen angegeben.

KAPITEL 5. ERGEBNISSE UND AUSWERTUNG

Tabelle 5.4: Rechenzeit des Gesamtmodells

| GT | n | RZ in s (symm.) | RZ in s (asymm.) | Iterationen (asymm.) |
|----|-------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| 4 | $2,20 \cdot 10^1$ | $5,3 \cdot 10^{-5}$ | $7,0 \cdot 10^{-4}$ | 3 |
| 6 | $9,40 \cdot 10^1$ | $1,6 \cdot 10^{-4}$ | $2,8 \cdot 10^{-3}$ | 3 |
| 11 | $3,07 \cdot 10^3$ | $4,4 \cdot 10^{-3}$ | $1,1 \cdot 10^{-1}$ | 3 |
| 14 | $2,46 \cdot 10^4$ | $3,6 \cdot 10^{-2}$ | $8,1 \cdot 10^{-1}$ | 4 |
| 15 | $4,92 \cdot 10^4$ | $7,3 \cdot 10^{-2}$ | $1,6 \cdot 10^0$ | 4 |
| 16 | $9,83 \cdot 10^4$ | $1,5 \cdot 10^{-1}$ | $3,2 \cdot 10^0$ | 4 |
| 20 | $1,57 \cdot 10^6$ | $2,3 \cdot 10^0$ | $9,5 \cdot 10^1$ | 4 |
| 21 | $3,15 \cdot 10^6$ | $4,6 \cdot 10^0$ | $5,7 \cdot 10^2$ | 5 |
| 22 | $6,29 \cdot 10^6$ | $9,3 \cdot 10^0$ | $3,4 \cdot 10^3$ | 5 |
| 24 | $2,52 \cdot 10^7$ | $3,7 \cdot 10^1$ | xxx | xxx |

Bei steigender Anzahl der Unbekannten, steigt auch die Zahl der benötigten Iterationen. Während bei $3,07 \cdot 10^3$ Unbekannten drei Iterationen nötig sind, erhöht sich die Anzahl bei $3,15 \cdot 10^6$ Unbekannten auf fünf.

Bei einer symmetrischen Problemstellung hängt die benötigte Rechenzeit demzufolge linear von der Zahl der Unbekannten ab. Bei asymmetrischen Problemstellungen ist der Zusammenhang bis $n \approx 10^5$ noch linear. Bei Erhöhung der Generationstiefe von 20 auf 21 bzw. von 21 auf 22 verdoppelt sich die Zahl der Unbekannten. Die Rechenzeit steigt hingegen um den Faktor sechs.

Um die Analyse des Programms abzuschließen, wird zusätzlich der reservierte Speicherplatz des Programms bestimmt. Zu Beginn des Abschnittes wurde der theoretisch benötigte Speicherplatz eines Algorithmus berechnet, jetzt wird der vom Programm angeforderte Speicher ausgewertet.

Tabelle 5.5: Speicherplatz des Gesamtmodells

| GT | n | SP (symm.) | SP (asymm.) |
|----|-------------------|------------|-------------|
| 11 | $3,07 \cdot 10^3$ | < 10 MB | < 10 MB |
| 14 | $2,46 \cdot 10^4$ | < 10 MB | 15,43 MB |
| 15 | $4,92 \cdot 10^4$ | < 10 MB | 23,15 MB |
| 16 | $9,83 \cdot 10^4$ | < 10 MB | 38,55 MB |
| 20 | $1,57 \cdot 10^6$ | 84,88 MB | 0,75 GB |
| 21 | $3,15 \cdot 10^6$ | 0,21 GB | 1,68 GB |
| 22 | $5,00 \cdot 10^6$ | 0,33 GB | 3,38 GB |

Der benötigte Speicherplatz hängt linear mit der Zahl der Unbekannten zusammen, wobei der Speicherbedarf des selbstentworfenen Teils des Programms minimiert wurde. Die Speicheranforderungen des Gleichungslösers konnten nicht verändert werden. Ein Speicherplatzbedarf von weniger als 10 MB konnte nicht exakt ausgewertet werden, da das verwendete Analyseprogramm Speicheranfragen unter 10 MB nicht auswertet. Da Werte in dieser Größenordnung jedoch nicht relevant sind, ist eine genauere Analyse in diesem Bereich auch nicht nötig.

Das Bernoulli-Modell kann für die Berechnung von Druckverlusten in Bronchialbäumen mit einer Generationstiefe von bis zu 19 eingesetzt werden. Die Berechnung von tieferen Generationen ist nicht nötig, da hier keine konvektiven Effekte auftreten (vgl. Abschnitt 5.4).

Wenn das Modell als Randbedingung in einer dreidimensionalen Strömungssimulation in den ersten sechs Generationen eingesetzt wird, muss das Bernoulli-Modell in Generation sieben beginnen. Aufgrund der Dominanz des konvektiven Transport im Bereich des Bronchialbaumes bis zur Generation 18, werden mit dem Bernoulli-Modell insgesamt 12 Generationen abgedeckt. Für Generationstiefen zwischen etwa 11 bis 14 liegen die benötigten Rechenzeiten zwischen 0,1 und 0,8 s (siehe Tabelle 5.5). Der erforderliche Speicherplatz liegt bei etwa 15 MB (vgl. Tabelle 5.5).

5.6 Nicht-sinusförmige Volumenströme

Bisher wurden ausschließlich sinusförmige Volumenströme vorgegeben. Diese liegen auch der analytischen Lösung einer oszillierenden Rohrströmung (vgl. Gleichung (2.12)) zugrunde. Die analytische Lösung berechnet für eine Druckamplitude eine Geschwindigkeitsamplitude, wobei beide Amplituden für sinusförmige Schwingungen gelten. Das Bernoulli-Modell berechnet hingegen einen Druckverlust für einen diskreten Wert des Volumenstroms. In Abbildung 5.32 werden die Verläufe des Druckes und des Volumenstroms am Eingang des Systems gezeigt. Als Strömungsfall wurde HFOV 3 gewählt (siehe Tabelle 2.1).

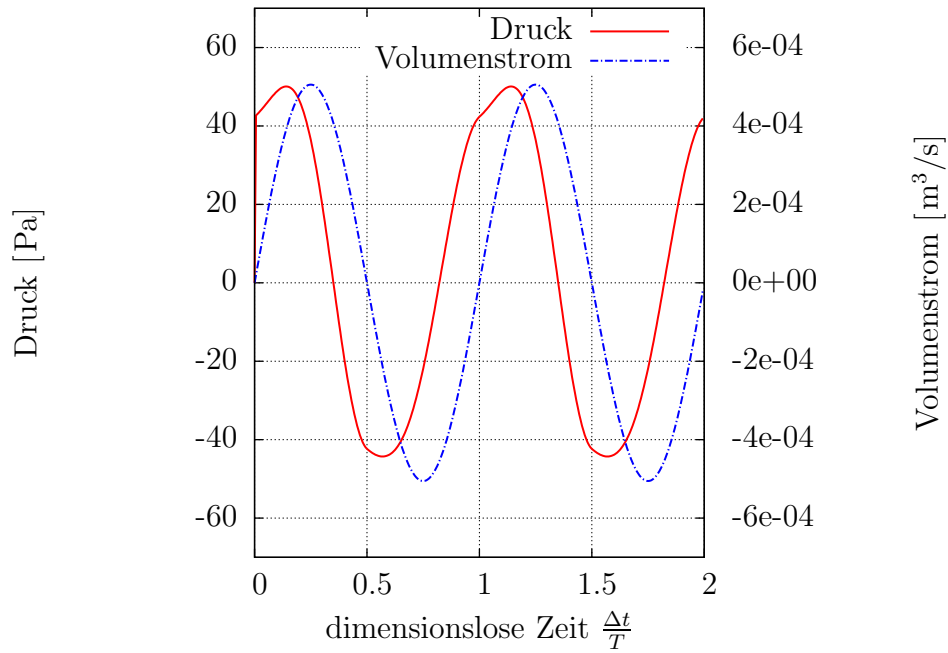


Abbildung 5.32: Sinusförmiger Volumenstrom mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass.

Wenn einem beliebiger zeitlicher Verlauf des Volumenstroms vorliegt, wird dieser zeitlich diskretisiert. Zu jedem diskreten Zeitpunkt liegt dann ein Wert für den Volumenstrom vor. Für diesen Wert berechnet das Bernoulli-Modell eine stationäre Lösung. Folgende Volumenströme werden betrachtet:

a) $\dot{V}_1 = \dot{V} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \dot{V} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t)$

b) $\dot{V}_2 = \begin{cases} \dot{V}, & \text{für } t \leq \frac{T}{2} \\ -\dot{V}, & \text{für } t > \frac{T}{2} \end{cases}$

c) $\dot{V}_3 = \begin{cases} \dot{V} \cdot t, & \text{für } t \leq \frac{T}{2} \\ \dot{V} \cdot (t - \frac{T}{2}), & \text{für } t > \frac{T}{2} \end{cases}$

Dabei wird der Volumenstrom als Funktion der Zeit vorgegeben und eine zeitliche Diskretisierung mit 16000 Zeitschritten vorgenommen. In den folgenden Abbildungen werden die Volumenströme und die zugehörigen Druckverläufe gezeigt. Folgende Volumenströme werden untersucht:

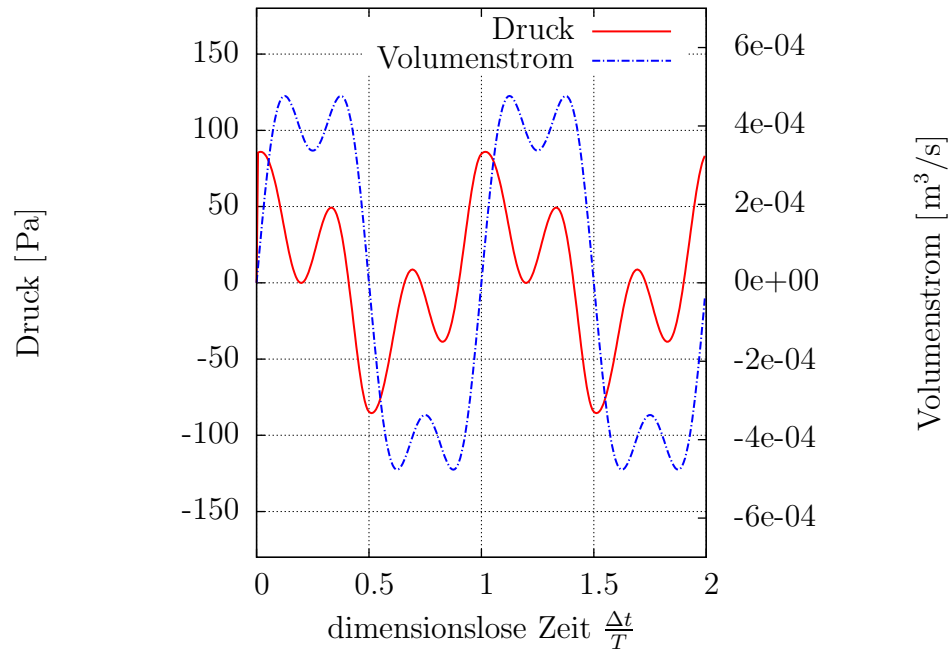


Abbildung 5.33: Volumenstrom a) mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass.

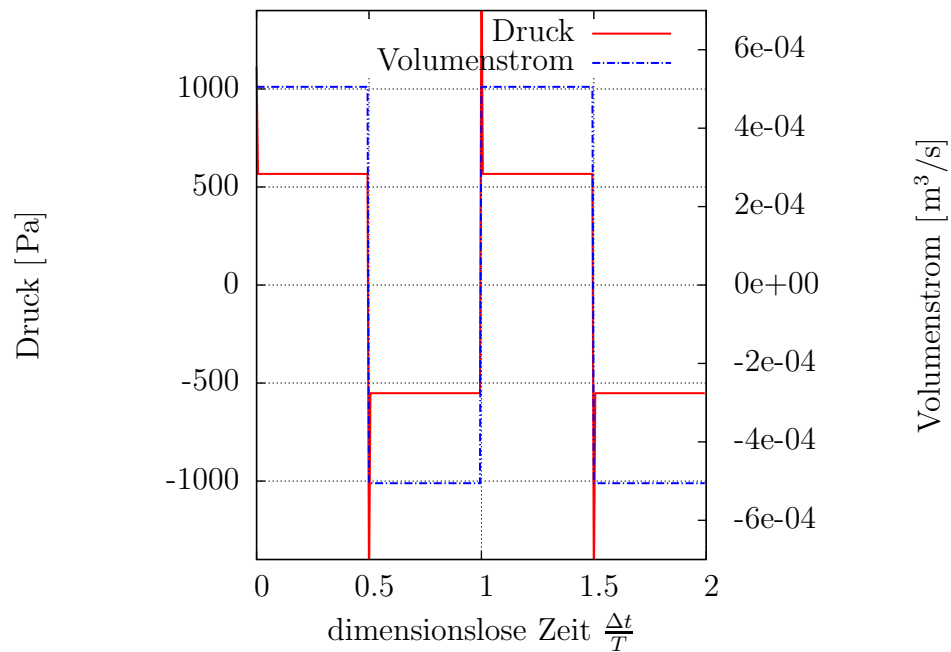


Abbildung 5.34: Volumenstrom b) mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass.

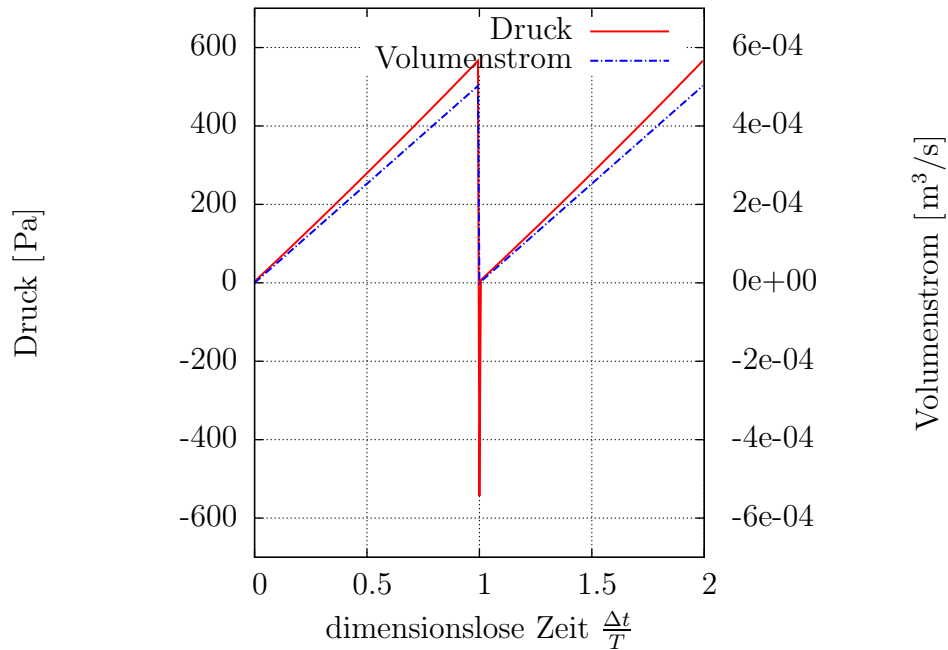


Abbildung 5.35: Volumenstrom c) mit zugehörigem Druckverlauf am Einlass.

Die Abbildungen zeigen den Verlauf der vorgegebenen Volumenströme. Die zugehörige Druckkurve zeigt einen qualitativ ähnlichen, phasenversetzten Verlauf. Bei sprunghaften Änderungen des Volumenstroms, erfolgt auch ein großer Ausschlag der Druckkurve. Dies liegt an der Trägheit des oszillierenden Fluids. Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass die Trägheit von der zeitlichen Änderung des Volumenstroms abhängt. Die zeitliche Ableitung wird über Rückwärtsdifferenzen bestimmt, weshalb bei steilen Gradienten ein größerer Fehler auftritt (siehe Abschnitt 4.4). Das Modell arbeitet also bei flacheren Gradienten auch mit einem kleinerem Fehler.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Bei der Ventilation in der menschlichen Lunge entsteht, aufgrund der vielschichtig verzweigten Geometrie, ein sehr komplexes Strömungsfeld. Das Strömungsverhalten ist ausschlaggebend für den Erfolg der maschinellen Beatmung. Die Untersuchung und Beschreibung der Strömungsvorgänge, soll zu einem besseren Verständnis der strömungsphysikalischen Vorgänge führen und somit auch zu einer effizienten Beatmung. Gerade im Bereich der HFOV-Beatmung fehlt es z.B. an Informationen über die Einstellungsparameter der Beatmungsgeräte. Um das Strömungsverhalten während der Ventilation besser zu verstehen, werden experimentelle und numerische Untersuchungen durchgeführt. Die numerischen Untersuchungen weisen aufgrund der komplexen Topologie einen enormen Rechenaufwand auf. Um diese trotzdem realisieren zu können, beschränken sich numerische Strömungssimulationen meist auf die oberen Generationen der Lunge. Um dabei auch den Einfluss der nicht aufgelösten Bereiche zu erfassen, werden einfache Randbedingungsmodelle benötigt. Das Ziel dieser Arbeit ist die Erstellung eines solchen, eindimensionalen Randbedingungsmodells.

Um die Topologie der Lunge auf einfache Weise einer Berechnung zugänglich zu machen, wird diese zunächst vereinfacht. In Abschnitt 2.1.1 wurde das Weibelmodell erläutert, welches die Lunge als Netzwerk aus geraden, starren Röhren (Bronchien) betrachtet. Das führt zu einfachen geometrischen Randbedingungen, die für die Strömungsuntersuchung gelten sollen.

In Abschnitt 3 wurde ein eindimensionales Modell entwickelt, welches Schrittweise für einen einzelnen Bronchus und die Verzweigung von Bronchien, entsprechend des Weibelmodells, hergeleitet wurde. Die eindimensionale Betrachtung setzt verschiedene Annahmen voraus. Die Strömung wird als inkompressibel und laminar angenommen, was in dem betrachteten Parameterraum auch näherungsweise zutrifft. Zusätzlich wird eine voll ausgebildete Strömung vorausgesetzt. Das bedeutet, dass Einlaufeffekte, die von der Reynolds- und der Womersley-Zahl abhängen, vom Modell nicht berücksichtigt werden. Die Energieerhaltung wird in Form der Bernoulli-Gleichung ausgedrückt, in der über Zu-

KAPITEL 6. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

satzterme die Druckverluste durch Reibung, die Trägheit des oszillierenden Fluids und die Verzweigungen der Bronchien eingehen. Die Druckverluste an den Verzweigungen werden in den bisherigen eindimensionalen Modellen nicht berücksichtigt. Da jeder einzelne Bronchus als starre Röhre angenähert wird, ist das elastische Verhalten der Lunge nicht erfasst. Als Randbedingung für das Modell dient ein volumenabhängiger Druck am Auslass. Dieser wird durch einen angehängten Ballon beschrieben. Über diese Randbedingung wird das elastische Verhalten des Alveolarbereiches und der nicht aufgelösten Generationen modelliert. Der Alveolarbereich entspricht im vorgestellten Modell daher den untersten, nicht berechneten Generationen, in denen aufgrund der geringen Strömungsgeschwindigkeiten keine konvektiven Effekte auftreten. Für den Alveolarbereich fehlt es jedoch an Daten für lokale Compliance-Werte.

Das so entwickelte Modell führt mit den geometrischen Randbedingungen zu einem System von Differentialgleichungen. Durch den Einsatz von Rückwärtsdifferenzen, wird dieses auf ein System von diskreten, nichtlinearen Gleichungen zurückgeführt und mit dem Gauss-Newton-Verfahren gelöst. Da das Konvergenzverhalten des Verfahrens stark von den Anfangswerten der Iteration abhängt, wurden für jede Strömungssituation individuelle Startwerte hergeleitet. Diese führen auch bei großen Gleichungssystemen bereits nach wenigen Iterationen zur gesuchten Lösung.

Das Modell wurde mit der Programmiersprache C++ in einem selbst entwickelten Programm umgesetzt. Die einzelnen Schritte sind in Abschnitt 4 erläutert. Das Programm soll beliebige Bronchialbäume und Ventilationsszenarien berechnen. Daher umfasst die Implementierung sowohl das Aufstellen der Gleichungen als auch das Lösen des Gleichungssystems. Aufgrund der großen Anzahl von Variablen entstehen Gleichungssysteme mit bis zu $2,5 \cdot 10^7$ Unbekannten. Ein wichtiger Faktor bei der Implementierung sind daher der Rechenzeit- und der Speicherplatzbedarf, welche in Abschnitt 5.5 untersucht und diskutiert wurden.

Bei großen Datenmengen hat die Verarbeitung der Daten einen erheblichen Einfluss auf die Rechenzeit. Um die Verarbeitungszeit der Daten möglichst gering zu halten, wurde ein effizienter Algorithmus entwickelt. Dieser wurde hinsichtlich des verwendeten Speicherplatzes und der benötigten Rechenzeit optimiert.

Das entwickelte Modell wird in Abschnitt 5.2 an einem einzelnen Bronchus untersucht. Die Ergebnisse werden mit der analytischen Lösung einer oszillierenden Rohrströmung verglichen. Dabei zeigt das Bernoulli-Modell eine sehr gute Übereinstimmung mit der

analytischen Lösung bis $Wo = 0,1$. Mit steigender Womersley-Zahl, ergibt sich eine Abweichung, die ihr Maximum bei $Wo = 5$ in der Größenordnung 10^{-1} hat. Die mittlere Abweichung liegt in der Größenordnung $5 \cdot 10^{-2}$. Auch der erwartete Phasenversatz wird vom Bernoulli-Modell erfasst. Die Abweichungen liegen in der Größenordnung 10^{-1} .

In Abschnitt 5.3 wird eine einfache Verzweigung untersucht, die aus drei Bronchien besteht. Der Vergleich einer dreidimensionalen Strömungssimulation zeigt eine sehr gute Übereinstimmung, besonders im Bereich der Expiration. Abweichungen ergeben sich jedoch infolge der getroffenen Annahmen. Da das entwickelte Modell auf der Bernoulli-Gleichung aufbaut, wird eine eindimensionale Betrachtung der Strömung vorgenommen. Dadurch können mehrdimensionale Strömungsstrukturen, wie z.B. Ablösungen an den Verzweigungstellen, nur durch empirisch ermittelte Koeffizienten erfasst werden.

Durch die Vorgabe von asymmetrischen Druckwerten als Randbedingung, können an den offenen Enden des Systems verschiedene Compliance-Werte eingestellt werden. Das führt zu einer ungleichmäßigen Verteilung der Volumenströme. Diese Verteilung ist ausschlaggebend für die Verteilung der Atemgase in der Lunge und kann über die Druckrandbedingung nachgebildet werden. Im Vergleich zu bestehenden Modellen, berücksichtigt das Bernoulli-Modell auch Druckverluste an den Verzweigungen.

In Abschnitt 5.4 wurden Bronchialbäume über mehrere Verzweigungen untersucht. Die Berechnungen bestätigen die in Abschnitt 2.1.2 angesprochene Trennung von konvektiven und diffusiven Transportvorgängen. Aufgrund der geringen Strömungsgeschwindigkeiten, treten in diesen keine konvektiven Effekte mehr auf. Der diffuse Transport wird im eindimensionalen Bernoulli-Modell nicht berücksichtigt. Die unteren Generationen müssen daher nicht betrachtet werden, was eine Reduzierung des Gleichungssystems ermöglicht. Der Bedarf an Speicherplatz und die benötigte Rechenzeit wurden in Abschnitt 5.5 eingehend untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass bei großen Generationstiefen hohe Rechenzeiten auftreten. Für den Einsatz als Randbedingung treten bei Generationstiefen zwischen $11 \leq GT \leq 14$ Rechenzeiten zwischen 0,1 s und 0,8 s auf. Der erforderliche Speicherplatz liegt bei etwa 15 MB. Die Rechenzeit beträgt im Vergleich mit einer dreidimensionalen Strömungssimulation in Abschnitt 5.3 nur ca. $\frac{1}{20000}$, wodurch sich ein hohes Potential für die Verwendung als Randbedingung ergibt.

Das vorgestellte Modell wurde so entwickelt, dass als Eingabedaten die Ergebnisse einer dreidimensionalen Simulation verwendet werden können. Dabei können die Werte der Geschwindigkeit und der Zeitschrittweite beliebig gewählt werden. In Abschnitt 5.6 wurde das Modell daher mit nicht-sinusförmigen Volumenströmen getestet, welche bei der Koppelung mit dreidimensionalen Simulationen auftreten. Das Ergebnis zeigt, dass die Form der

KAPITEL 6. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

eingehenden Volumenströme für das Modell unbedeutend ist. Das ist ein großer Vorteil des Modells. Andere Modelle, wie z.B. das Impedanz-Modell basieren auf der analytischen Lösung einer oszillierenden Rohrströmung. Diese setzt eine sinusförmige Druckschwingung voraus. Für nicht-sinusförmige Druckschwingungen kann daher nur schwer eine Aussage getroffen werden.

Das Bernoulli-Modell kann zusätzlich mit einer variablen Zeitdiskretisierung rechnen. Das ist wichtig, da dreidimensionale Strömungssimulationen meist auf einer variablen Zeitdiskretisierungen basieren.

Das elastische Verhalten des gesamten Bronchialbaumes wird mit dem vorliegenden Modell nicht erfasst. Die Modellierung des lokalen elastischen Verhaltens des Bronchialbaumes und dessen Einfluss auf die konvektiven Transportvorgänge und die Druckverluste, könnte Gegenstand einer zukünftigen Arbeit sein.

Die Druckrandbedingung, welche das elastische Verhalten des Alveolarbereiches modelliert, kann um ein nicht-lineares Materialverhalten des Ballons erweitert werden. Bisher wird ein linear elastisches Verhalten angenommen, was nicht dem Verhalten der Lunge entspricht. Ein möglicher Ansatz wäre ein Mooney-Rivlin-Modell, was unter anderem von Soodt *et al.* [25] verwendet wird.

Eine weitere Verbesserung des Modells könnte die bessere Erfassung der Druckverluste an den Verzweigungen darstellen. In Abschnitt 3.1.2 wurde an den Verzweigungen stets eine symmetrische Teilung der Volumenströme vorausgesetzt. Bei asymmetrischen Strömungen treten jedoch komplexere Strömungssituationen, z.B. Querströmungen auf. Für diese könnten neue Bestimmungsgleichungen untersucht und implementiert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] ADLER, K., AND BRÜCKER, C. Dynamic flow in a realistic model of the upper human lung airways. *Experiments in Fluids* 43, 2 (2007), 411–423.
- [2] BAUMHOER, D., STEINBRÜCK, I., AND GÖTZ, W. *Histologie*. Urban und Fischer, 2003.
- [3] CHOI, J., XIA, G., TAWHAI, M., HOFFMAN, E., AND LIN, C. Numerical study of high-frequency oscillatory air flow and convective mixing in a ct-based human airway model. *Annals of biomedical engineering* (2010), 1–22.
- [4] COMERFORD, A., FÖRSTER, C., AND WALL, W. Structured tree impedance out-flow boundary conditions for 3d lung simulations. *Journal of biomechanical engineering* 132 (2010), 081002.
- [5] FELDMANN, D., AND WAGNER, C. Numerical simulation of the high-frequency oscillatory ventilation in generic models of the human airways. In *Seventh International Symposium On Turbulence and Shear Flow Phenomena* (Ottawa, Canada, 2011).
- [6] GLÜCK, B. *Hydrodynamische und Gasdynamische Rohrströmung, Druckverluste*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1988.
- [7] HAGER, D. N., FESSLER, H. M., KACZKA, D. W., SHANHOLTZ, C. B., FULD, M. K., SIMON, B. A., AND BROWER, R. G. Tidal volume delivery during high-frequency oscillatory ventilation in adults with acute respiratory distress syndrome. *Critical Care Medicine* 35 (2007), 1522–1529.
- [8] HAMMER, J., AND FREY, U. *Atemphysiologie*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [9] HANKE-BOURGEOIS, M. *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des wissenschaftlichen Rechnens*. Vieweg+ Teubner, 2006.

- [10] HERWIG, H. *Strömungsmechanik AZ: eine systematische Einordnung von Begriffen und Konzepten der Strömungsmechanik*. Vieweg+ Teubner, 2004.
- [11] HORSFIELD, K., DART, G., OLSON, D., FILLEY, G., AND CUMMING, G. Models of the human bronchial tree. *Journal of Applied Physiology* 31, 2 (1971), 207.
- [12] KÖNIGSBERGER, K. *Analysis 2*. Springer, 2004.
- [13] KRENKEL, L., PENNECOT, J., LENZ, C., FELDMANN, D., AND WAGNER, C. Optimierung der hochfrequenz-oszillationsventilation mittels strömungsmechanischer methoden und kontrastgasgestützter magnetresonanztomografie. *Dresdener Beiträge zur Medizintechnik 3. Dresdner Medizintechnik Symposium mit DFG Forschungsschwerpunkt Protektive Beatmungskonzepte, Vol. 10*. (2011), 107–113.
- [14] KRISHNAN, J., AND BROWER, R. High-frequency ventilation for acute lung injury and ards*. *Chest* 118, 3 (2000), 795.
- [15] LANDAU, L., AND LIFSHITZ, E. *Hydrodynamik, lehrbuch der theoretischen physik*, volume vi, 1991.
- [16] LIPPERT, H., HERBOLD, D., AND LIPPERT-BURMESTER, W. *Anatomie*. Elsevier, Urban&FischerVerlag, 2006.
- [17] LOUDON, C., AND TORDESILLAS, A. The use of the dimensionless womersley number to characterize the unsteady nature of internal flow. *Journal of theoretical biology* 191, 1 (1998), 63–78.
- [18] MÜLLER, T., BUDWEISER, S., MUDERS, F., SCHULZ, C., JERON, A., NEUHIERL, F., RIEGGER, G., AND PFEIFER, M. Hochfrequenzoszillationsventilation beim akuten lungenversagen des erwachsenen. *Deutsches Ärzteblatt* 14 (2004), A928–A934.
- [19] OLUFSEN, M. Structured tree outflow condition for blood flow in larger systemic arteries. *American journal of physiology-Heart and circulatory physiology* 276, 1 (1999), H257.
- [20] OLUFSEN, M., PESKIN, C., KIM, W., PEDERSEN, E., NADIM, A., AND LARSEN, J. Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions. *Annals of biomedical engineering* 28, 11 (2000), 1281–1299.

- [21] SCHÄFER, M. *Numerik im Maschinenbau*. Springer, 1999.
- [22] SCHLICHTING, H., AND GERSTEN, K. *Grenzschicht-Theorie*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [23] SCHOLZ, A., KRENKEL, L., TEREKHOV, M., FRIEDRICH, J., RIVOIRE, J., KÖBRICH, R., WOLF, U., KALTHOFF, D., DAVID, M., WAGNER, C., ET AL. Magnetic resonance imaging and computational fluid dynamics of high frequency oscillatory ventilation (hfov). *Fundamental Medical and Engineering Investigations on Protective Artificial Respiration* (2011), 107–128.
- [24] SILBERNAGL, S., AND DESPOPOULOS, A. *Taschenatlas der Physiologie*. Thieme, Stuttgart, New York, 2003.
- [25] SOODT, T., HENZE, A., BOENKE, D., KLAAS, M., AND SCHROEDER, W. Fluid mechanical equilibrium processes in a multi-bifurcation model. *Fundamental Medical and Engineering Investigations on Protective Artificial Respiration* (2011), 81–95.
- [26] TAWHAI, M., HUNTER, P., TSCHIRREN, J., REINHARDT, J., MCLENNAN, G., AND HOFFMAN, E. Ct-based geometry analysis and finite element models of the human and ovine bronchial tree. *Journal of Applied Physiology* 97, 6 (2004), 2310.
- [27] TRUCKENBRODT, E. *Fluidmechanik Band 1*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [28] 'UNIVERSITYOFFLORIDA'. Umfpack website auf website der universität florida. Gainesville, FL (USA).
- [29] WALL, W., WIECHERT, L., COMERFORD, A., AND RAUSCH, S. Towards a comprehensive computational model for the respiratory system. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* 26, 7 (2010), 807–827.
- [30] WEIBEL, E. What makes a good lung. *Swiss Med Wkly* 139, 27-28 (2009), 375–375.
- [31] WEIBEL, E. R. *Morphometry of the human lung*. Springer-Verlag and Academic Press, Berlin, New York, 1963.
- [32] WOMERSLEY, J. R. An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow im mammalian arteries. *WADC TECHNICAL REPORT TR 56-614* (1957).

Literaturverzeichnis

- [33] ZIELKE, W. *Frequency dependent friction in transient pipe flow*. PhD thesis, University of Michigan, 1966.

A Anhang - Quellcode Listings

A.1 Funktion setGlSys

```
// Eingabewerte:
double  $\dot{V}_0$ ;      // Eingangs-Volumenstrom im
                    // aktuellen Zeitschritt
double  $\dot{V}_{0alt}$ ;  // Eingangs-Volumenstrom aus dem
                    // letzten Zeitschritt
double n1;         // Generation des Einlasses
double n2;         // Generation des Auslasses
double unknown;    // Anzahl der Unbekannten
double numberEq;   // Anzahl der Druckgleichungen
double dt;         // Zeitschrittweite;
double VolNorm;    // Normierungsgröße fuer den Volumenstrom
double* xPrev;     // Unbekanntenvektor des letzten Zeitschrittes
double* g;         // gegebene Druckwerte an den Auslässen

// setzen der Zählindizes
int i = 0;         // aktuelle Gleichung
int l = 1;         // Index für ersten Term der Druckgleichungen
int k = 1;         // Index für zweiten Term der Druckgleichungen
int m = 0;         // Index für Vektor der gegebenen Druckwerte
int n = 0;         // Gleichungen in einer Generation
int gen = n1;      // jeweilige Generation

// mit  $Bif_{gen}$ ,  $Fric_{gen}$  und  $Ine_{gen}$  sind die Verluste bezeichnet
// in diese Werte gehen auch die Materialgrößen  $\rho$  und  $\nu$  ein
```

```

// Aufstellen der ersten Gleichung
// (Indizes sind bei jeder Konstellation identisch)
r[0] = x[0] - x[1] - {Bifgen *  $\dot{V}_0^2$  - Fricgen *  $\dot{V}_0$ 
    - Inegen * ( $\dot{V}_0 - \dot{V}_{0alt}$ )/dt};
gen++;
k++;

// for-Schleife für Druckgleichungen
// (außer der letzten Generation)
for (i = 1; i < numberEq - pow(2,n2-n1); i++)
{
    r[i] = x[1] - x[k] - Bifgen *  $x[k+1]^2$  - Fricgen * x[k+1]
    - Inegen * (x[k+1] - xPrev[k+1])/dt;

    if (i % 2 == 0)
    {
        if (i == 2) // hochzählen von 1 um eins (wenn i = 2)
        {
            l++;
        }
        else
        {
            l = l + 2; // hochzählen von 1 um 2 (bei geraden i)
        }
    }

    k = k + 2;
    n++;

    // wenn alle Gleichungen einer Generation abgearbeitet sind
    // wird gen hochgezählt und n auf 0 gesetzt
    if (n == pow(2,gen-n1))
    {
        gen++;
        n = 0;
    }
}

```

```

    }
}

// for-Schleife für Druckgleichungen
// (nur in der letzten Generation)
for (i = numberEq - pow(2,n2-n1); i < numberEq; i++)
{
    r[i] = x[l] - Fricgen * x[k] - Inegen * (x[k]
        - xPrev[k]) / dt - g[m];

    if (i % 2 == 0)
    {
        if (i == 2) // hochzählen von 1 um eins (wenn i = 2)
        {
            l++;
        }
        else
        {
            l = l + 2; // hochzählen von 1 um 2 (bei geraden i)
        }
    }

    m++;
    k++;
}

// setzten der ersten Kontinuitätsgleichung
// (Indizes sind bei jeder Konstellation identisch)
r[numberEq] =  $\dot{V}_0$  / volNorm - x[3] / volNorm - x[5] / volNorm;

// neusetzen der Zählvariablen
k = 7;
l = 3;

// for-Schleife für alle Kontinuitaetsgleichungen

```

```
// (ausser der letzten Generation)
for (i = numberEq + 1; i < unknown - pow(2,n2-n1)/2; i++)
{
    r[i] = x[l] / volNorm - x[k] / volNorm - x[k+2] / volNorm;

    l = l + 2;
    k = k + 4;
}

// neusetzen der Zählvariablen
k = k - 1;

// for-Schleife für alle Kontinuitaetsgleichungen
// (nur in der letzten Generation)
for (i = unknown - pow(2,n2-n1)/2; i < unknown; i++)
{
    r[i] = x[l] / volNorm - x[k] / volNorm - x[k+1] / volNorm;

    l = l + 2;
    k = k + 2;
}
```

A.2 Funktion setJac

```
// Eingabewerte:
double n1;      // Generation des Einlasses
double n2;      // Generation des Auslasses
double unknown; // Anzahl der Unbekannten
double numberEq; // Anzahl der Druckgleichungen
double dt;      // Zeitschrittweite;
double VolNorm; // Normierungsgroesse fuer den Volumenstrom
list<CData> *&liste; // Feld von Listen
// CData: selbst angelegter Datentyp
// enthält den Zeilenindex und den Wert
// mit  $Bif_{gen}$ ,  $Fric_{gen}$  und  $Ine_{gen}$  sind die Verluste bezeichnet
// in diese Werte gehen auch die Materialgroessen  $\rho$  und  $\nu$  ein

// setzen der Zählvariablen
int i = \color{green}{0}; // Zeilenindex für aktuelle Gleichung
int k = 1; // Spaltenindex für aktuelle Gleichung (erster Term)
int l = 1; // Spaltenindex für aktuelle Gleichung (zweiter Term)
int n = 0; // Gleichungen in einer Generation
int gen = n1+1; // jeweilige Generation

// Ableitung der ersten Gleichung
// bei CData(x,y) entspricht x dem Zeilenindex
// und y dem Wert der Ableitung
// Befehl push_back(x) setzt den Wert x an das Ende der Liste

liste[0].push_back(CData(0,1)); // liste[0] entspricht Spalte 0
liste[1].push_back(CData(0,-1)); // liste[1] entspricht Spalte 1

// for-Schleife für Ableitungen der Druckgleichungen
// (ausser in der letzten Generation)
for (int i = 1; i < numberEq - pow(2,n2-n1); i++)
{
    liste[1].push_back(CData(i,1));
}
```

```

    if (i % 2 == 0)
    {
        if (i == 2) // hochzählen von 1 um eins (wenn i = 2)
        {
            l++;
        }
        else
        {
            l = l + 2; // hochzählen von 1 um 2 (bei geraden i)
        }
    }

    k++;

    liste[k].push_back(CData(i, -1));

    k++;

    // wenn alle Gleichungen einer Generation abgearbeitet sind
    // wird gen hochgezählt und n auf 0 gesetzt
    if (n == pow(2, gen-n1))
    {
        gen++;
        n = 0;
    }

    n++;

    liste[k].push_back(CData(i, -2 *  $Bif_{gen}$  * x[k] -  $Fric_{gen}$ 
                                -  $Ine_{gen}$  / dt));
}

// for-Schleife für Ableitungen der Druckgleichungen
// (nur in der letzten Generation)

```

ANHANG A. ANHANG - QUELLCODE LISTINGS

```
for (int i = numberEq - pow(2,n2-n1); i < numberEq; i++)
{
    liste[l].push_back(CData(i,1));

    if (i % 2 == 0)
    {
        if (i == 2) // hochzählen von 1 um eins (wenn i = 2)
        {
            l++;
        }
        else
        {
            l = l + 2; // hochzählen von 1 um 2 (bei geraden i)
        }
    }

    k = k + 1;

    liste[k].push_back(CData(i,-Fricgen
                                - Inegen / dt));
}

// Ableitungen der ersten Kontinuitätsgleichung
liste[3].push_back(CData(numberEq,-1));
liste[5].push_back(CData(numberEq,-1));

// neusetzen der Zählvariablen
k = 7;
l = 3;

// Ableitungen der Kontinuitätsgleichungen
// außer der letzten generation
for (i = numberEq + 1; i < unknown - pow(2,n2-n1)/2; i++)
{
    liste[k].push_back(CData(i,-1 / volNorm));
}
```

```
k = k + 2;

liste[k].push_back(CData(i,-1 / volNorm));
k = k + 2;

liste[l].push_back(CData(i,1 / volNorm));
l = l + 2;
}

// Ableitungen der Kontinuitätsgleichungen
// nur in der letzten Generation
for (i = unknown - pow(2,n2-n1)/2; i < unknown; i++)
{
    liste[k].push_back(CData(i,-1 / volNorm));
    k = k + 1;

    liste[k].push_back(CData(i,-1 / volNorm));
    k = k + 1;

    liste[l].push_back(CData(i,1 / volNorm));
    l = l + 2;
}
```


A.3 Funktion solveGlSys

```
// Anlegen der noetigen Felder
double *Ax;      // Feld für Matrixeinträge
int *Ai;         // Feld für Zeilenindizes
int *Ap;         // Feld für Anzahl der Matrixeinträge je Spalte

void *Symbolic , *Numeric;      // Nullzeiger für UMFPACK

Ap[0] = 0;
list<CData>::iterator iter;      // Iterator für Listen
int counter = 0;                // Zählvariable

// Schleife über die Anzahl der Unbekannten
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    // setzen des Iterators an den Anfang der Liste i
    iter = liste[i].begin();
    // Schleife → solange wir uns innerhalb einer Liste befinden
    while (iter != liste[i].end())
    {
        // Schreiben der Werte in das zugehörige Feld Ax
        Ax[counter] = (*iter).m_value;
        // Schreiben der Indizes in das zugehörige Feld Ai
        Ai[counter] = (*iter).m_line;
        // hochzählen der Zaehlvariable
        counter++;
        // hochzählen des Iterators
        iter++;
    }
    // Aufsummieren der Anzahl der Spalteneintraege
    Ap[i+1] = Ap[i] + liste[i].size();
}

// Übergeben der Daten an UMFPACK
```

```
// symbolische Analyse
```

```
umfpack_di_symbolic(n, n, Ap, Ai, Ax, &Symbolic ,  
                    NULL, NULL);
```

```
// LU Zerlegung
```

```
umfpack_di_numeric(Ap, Ai, Ax, Symbolic , &Numeric ,  
                   NULL, NULL);  
umfpack_di_free_symbolic(&Symbolic);
```

```
// Lösen des Systems
```

```
umfpack_di_solve(UMFPACK_A, Ap, Ai, Ax, x, b,  
                 Numeric , NULL, NULL);  
umfpack_di_free_numeric(&Numeric);
```